

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

**Топология гиперболических многообразий,
определяемых прямоугольными многогранниками
конечного объёма**

Выполнил студент 603 группы
Цыганков Дмитрий Александрович

(подпись студента)

Научный руководитель:
профессор, д. ф.-м. н.
Панов Тарас Евгеньевич

(подпись научного руководителя)

Москва

2025 г.

Содержание

1 Введение	1
2 Предварительные сведения	4
2.1 Малые накрытия и вещественные момент-угол пространства .	4
2.2 Прямоугольные идеальные 3-многогранники в пространстве Лобачевского	6
2.3 Построение группы $Ker\phi^{(k)}$ и гиперболических многообразий над прямоугольными многогранниками	7
2.4 Коэн-Маколеевость симплициальных комплексов	9
2.5 Достаточное условие существования расслоения над окружностью	10
3 Расслоение гиперболических 3-многообразий над окружностью	14
4 Кольца \mathbb{Z}_2-когомологий	24
5 Некомпактные гиперболические 3-многообразия как дополнения до зацеплений	30
6 Некоторые наблюдения и гипотезы	33

1 Введение

Работа посвящена изучению топологии гиперболических многообразий над прямоугольными многогранниками конечного объёма, которые лежат в пространстве Лобачевского \mathbb{L}^n , где $n < 13$ [15]. Примеры таких многогранников известны в размерностях $n \leq 8$ [1], полная классификация имеется лишь при $n = 2, 3$. [16]

Пусть $P \subset \mathbb{L}^n$ прямоугольный многогранник конечного объёма. Во всей работе по умолчанию предполагается, что P не компактный, если не указано противное. Группой Коксетера многогранника P называется группа, порождённая отражениями относительно гиперплоскостей, которые содержат гиперграни многогранника P . Такая группа задаётся образующими и соотношениями следующим образом:

$$G(P) = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = 1, g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle$$

Группа $G(P)$ действует отражениями на пространстве \mathbb{L}^n . Факторпространством является исходный многогранник P .

Имеется конструкция Веснина из [17], позволяющая найти подгруппу индекса 2^k в $G(P)$, которая действует свободно на \mathbb{L}^n . Пусть имеется эпиморфизм $\phi^{(k)} : G(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$ такой, что образы отражений g_{i_1}, \dots, g_{i_r} в любых

r гипергранях F_{i_1}, \dots, F_{i_r} , имеющих непустое пересечение, линейно независимы в \mathbb{Z}_2^k . Тогда $\text{Ker}\phi^{(k)}$ действует свободно на \mathbb{L}^n и является подгруппой индекса 2^k в группе $G(P)$.

Эпиморфизм $\phi^{(k)}$ допускает разложение в композицию по универсальному свойству гомоморфизма абелизации:

$$G(P) \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$$

Многообразие $\mathbb{L}^n / \text{Ker}\phi^{(k)}$ однозначно строится по многограннику P и \mathbb{Z}_2 -матрице Λ , поэтому удобно ввести обозначение $N(P, \Lambda) = \mathbb{L}^n / \text{Ker}\phi^{(k)}$.

Многообразия $N(P, \Lambda)$ деформационно ретрагируются на частичные факторы вещественных момент-угол пространств $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P} / \text{Ker}\Lambda$ в случае, если P некомпактный (**Утверждение 2.15**). В случае, если P компактный многогранник, многообразие $N(P, \Lambda)$ гомеоморфно частичному фактору вещественному момент-угол многообразия по свободному действию $\text{Ker}\Lambda$, а именно, многообразию $\mathcal{R}_P / \text{Ker}\Lambda$.

В **Разделе 3** изучается, какие из гиперболических многообразий над прямоугольными многогранниками конечного объема расслаиваются над окружностью. Из-за того, что в случае чётной размерности эйлерова характеристика таких многообразий отлична от нуля, расслоение над окружностью возможно только в размерностях $n = 3, 5, 7$.

При $n = 5$ известно всего несколько примеров многообразий над прямоугольными многогранниками, которые расслаиваются над окружностью [18].

Размерность $n = 3$ замечательна тем, что применима теорема Столлинга, что позволяет, используя теорию Бествина-Бреди [19], свести задачу к элементарной комбинаторике.

Мы будем рассматривать задачу лишь для многогранников, у которых все вершины лежат на абсолюте. У таких многогранников существует и единственная, с точностью до замены цветов, шахматная раскраска граней в 2 цвета. Поэтому по каждому идеальному многограннику P однозначно строится гиперболическое многообразие $N(P)$, склеенное из 4 копий многогранника.

Используя конструкцию из [1], мы сведём задачу к раскраске вершин нерв-комплекса \mathcal{K}_P , который в нашем случае окажется графом, в 2 цвета специальным образом и покажем, что во многих случаях эта особая раскраска существует, что позволит нам утверждать, что многообразие $N(P)$ расслаивается над окружностью для многих многогранников P (**Теорема 3.3**).

Более того, легко доказывается, что у таких расслоений слоем является двумерная сфера с проколами в количестве, равному числу вершин многогранника P .

В **Разделе 4**, используя дга-модель Франца для когомологий вещественных торических пространств из [5], мы получим аддитивное описание ко-

гомологий:

$$H^*(N(P, \Lambda); \mathbb{Z}_2) = \text{Tor}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i,j} \text{Tor}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}^{-i,j}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2)$$

В случае, если \mathcal{K}_P Коэн-Маколеев, в тор-алгебре остается только нулевая внешняя градуировка, которую можно описать в явном виде. Тогда мы получаем ещё и мультипликативное описание кольца когомологий $H^*(N(P, \Lambda); \mathbb{Z}_2)$ (**Теорема 4.5**)

\mathcal{K}_P Коэн-Маколеев тогда и только тогда, когда P имеет не более одной вершины, лежащей на абсолюте, либо когда все вершины лежат на абсолюте (Утверждение 4.2).

В работе доказывается, что в общем случае (при отсутствии свойства Коэн-Маколеевности) в тор-алгебре остаются нетривиальными только нулевая и первая внешние градуировки (**Теорема 4.6**)

Известен классический результат Тёрстона о том, что дополнение до $2n$ звенного зацепления в трёхмерной сфере можно разбить на 4 копии антипризмы A_n , которая реализована как прямоугольный многогранник в пространстве Лобачевского \mathbb{L}^3 со всеми вершинами на абсолюте. В **Разделе 5** написано доказательство этого факта с целью изучения возможности обобщить утверждение на другие идеальные прямоугольные 3-многогранники.

Для многообразий имеется задача о когомологической жёсткости. Семейство многообразий Σ называется когомологически жёстким, если для любых двух многообразий $M, M' \in \Sigma$ верно следующее: если $H^*(M) \cong H^*(M')$, то M и M' диффеоморфны.

В связи с этой задачей изучение топологии многообразий $N(P, \Lambda)$ представляет дополнительный интерес, потому что малые накрытия над многогранниками Погорелова когомологически жёсткое семейство, что доказано в работе [7].

В заключительном **Разделе 6** описан гомотопический тип многообразий $N(P)$, где P прямоугольный идеальный 3-многогранник, покрашенный шахматно в 2 цвета. Оказывается, что $N(P)$ гомотопически эквивалентен кубическому комплексу, состоящему из двумерных торов, склеенных друг с другом, что позволяет выдвинуть **Гипотезу 6.3** о том, что $N(P)$ гомотопически эквивалентно $S^3 \setminus L$, где L некоторое зацепление, не только в случае, когда P является антипризмой A_n , но и для всех идеальных прямоугольных 3-многогранников P .

Теорема 3.3 позволяет строить 1-правильные (или правильные) состояния на некоторых прямоугольных идеальных 3-многогранниках P . Из доказательства ясно, что описан далеко не полный класс многогранников, которые допускают 1-правильные состояния.

Многогранников, которые допускают правильные состояния, но не допускают 1-правильных состояний, обнаружить не удалось. К тому же, **Гипотеза 6.3** позволяет предполагать, что все прямоугольные идеальные 3-многогранники допускают правильные (или, сильнее, 1-правильные) состояния. Отсюда получаем **Гипотезу 6.4** о том, что для любого прямоугольного идеального 3-многогранника P многообразие $N(P)$ расслаивается над

окружностью.

Автор выражает благодарность Панову Тарасу Евгеньевичу за многолетнее сотрудничество, внимание, поддержку и постоянное предоставление интересных задач, благодаря которым я смог посмотреть на старые задачи под новым углом, неожиданным образом используя новые разделы математики.

2 Предварительные сведения

2.1 Малые накрытия и вещественные момент-угол пространства

Изначально малые накрытия были определены в [2], там же изучены их кольца когомологий. Дга-модели для когомологий вещественных момент-угол комплексов построены в [5], [6].

Определения и свойства в данном разделе изложены по работе [7].

Определение 2.1 *Малым накрытием над простым n -мерным многогранником называется n -мерное многообразие N такое, что:*

- 1) *Имеется локально стандартное действие группы \mathbb{Z}_2^n на N . То есть, каждая точка $x \in N$ содержится в \mathbb{Z}_2^n -инвариантной окрестности, которая \mathbb{Z}_2^n -эквивариантно гомеоморфна открытому подмножеству в \mathbb{R}^n , а в \mathbb{R}^n \mathbb{Z}_2^n действует отражениями относительно координатных плоскостей*
- 2) *Имеется проекция $\pi : N \rightarrow P$, слоями которой являются орбиты \mathbb{Z}_2^n действия*

Имеется и конструктивное определение малых накрытий.

Определение 2.2 *Пусть P n -мерный многогранник с t гипергранями F_1, \dots, F_t . Пусть Λ - матрица размера $n \times t$ с элементами из \mathbb{Z}_2 , столбцы $\lambda_i = (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{ti})$ обладают следующим свойством:*

$$\det(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) = 1, F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \neq \emptyset$$

Тогда пара (P, Λ) называется характеристической

По каждой характеристической матрице можно построить малое накрытие

$$N(P, \Lambda) = P \times \mathbb{Z}_2^n / \sim$$

где $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \iff x_1 = x_2, t_1 \cdot t_2^{-1} \in T(x_1)$. $T(x) = \prod_{i: x \in F_i} T_i$, где T_i

подгруппа в \mathbb{Z}_2^n , порождённая вектором λ_i . Получается, что многообразие $N(P, \Lambda)$ представляет собой склейку вдоль граней 2^n экземпляров многогранника P .

Верно и обратное: по каждому малому накрытию можно построить характеристическую матрицу такую, что из неё и многогранника можно будет построить малое накрытие.

Однако если многогранник имеет размерность больше 3, то не всегда можно построить характеристическую матрицу, а значит не над каждым простым многогранником есть малое накрытие. Примеры появились довольно быстро, уже в [2].

По n -мерному многограннику P можно построить ещё один объект: вещественное момент-угол-многообразие \mathcal{R}_P . Теперь многогранник предполагается произвольным простым, ограничений в виде отсутствия характеристической матрицы нет.

Определение 2.3 Многообразие \mathcal{R}_P определяется из следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_P & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}_{\geq}^m \end{array}$$

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + b_i \geq 0; \ i = 1, \dots, m\}$$

i_P - вложение многогранника в положительный ортант

$$i_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto (\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle + b_1, \dots, \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{x} \rangle + b_m)$$

$$\mu : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1^2, \dots, x_m^2)$$

Получено n -мерное многообразие $\mathcal{R}_P = \mu^{-1}(i_P(P))$, которое задано как пересечение $m - n$ квадрик в \mathbb{R}^m .

Если имеется характеристическая матрица Λ для многогранника P , то можно задать \mathbb{Z}_2 -линейное отображение $\Lambda : \mathbb{Z}_2^m \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$. Тогда $\text{Ker} \Lambda \cong \mathbb{Z}_2^{m-n}$ и свободно действует на \mathcal{R}_P . Если профакторизовать по этому действию, получится малое накрытие, происходящее из характеристической пары (P, Λ) :

$$\mathcal{R}_P / \text{Ker} \Lambda \cong N(P, \Lambda)$$

Определение 2.4 Абстрактным симплициальным комплексом \mathcal{K} на множестве вершин $[m] = \{1, \dots, m\}$ будем называть набор подмножеств $\sigma \subset [m]$ таких, что если $\sigma_1 \in \mathcal{K}$, то для любого подмножества $\sigma_2 \subset \sigma_1$ выполнено: $\sigma_2 \in \mathcal{K}$

Элементы $\sigma \in \mathcal{K}$ будем называть симплексами. Всюду в работе предполагается, что одноэлементные подмножества $[m]$ лежат в \mathcal{K} .

Определение 2.5 Геометрическим симплициальным комплексом называется набор S геометрических симплексов произвольных размерностей, лежащих в некотором пространстве \mathbb{R}^n , удовлетворяющий следующим двум условиям:

1. Каждая грань симплекса из S (в том числе \emptyset) лежит в S .

2. Пересечение любых двух симплексов из S является гранью каждого из них.

Определение 2.6 Пусть \mathcal{K} абстрактный симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Геометрический симплициальный комплекс S называется геометрической реализацией комплекса \mathcal{K} , если существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $[m]$ и множеством вершин комплекса S , при котором симплексы комплекса \mathcal{K} переходят в наборы вершин симплексов из S .

С учётом определений выше, всюду далее не будем делать различий между абстрактным симплициальным комплексом \mathcal{K} на множестве $[m]$ и его геометрической реализацией, которая всегда существует. Например, см [8, Конструкция 2.2.3]

Пусть \mathcal{K} произвольный симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Имеется следующее обобщение вещественных момент-угол многообразий.

Определение 2.7 Момент-угол комплексом над симплициальным комплексом \mathcal{K} называется пространство вида $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (D^1)^{\sigma} \times (S^0)^{[m] \setminus \sigma}$, где $S^0 = \{\pm 1\}$ граница отрезка $D^1 = [-1, 1]$.

В случае если $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ для некоторого простого P , существует гомеоморфизм $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P} \cong \mathcal{R}_P$.

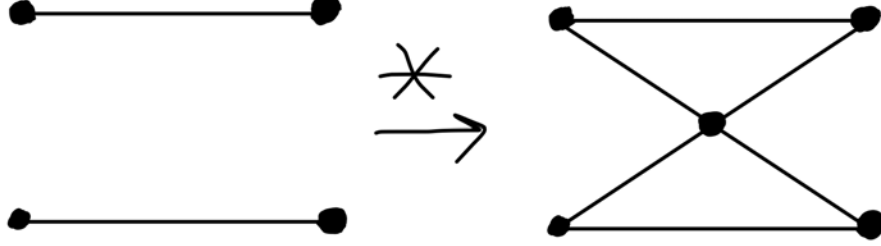
2.2 Прямоугольные идеальные 3-многогранники в пространстве Лобачевского

В этом разделе будут изложены основные факты про прямоугольные идеальные 3-многогранники, их классификация и построение. Изложение основано на [16].

Утверждение 2.8 Комбинаторный 3-многогранник P может быть реализован как прямоугольный идеальный многогранник в пространстве \mathbb{L}^3 тогда и только тогда, когда во всех его вершинах сходится по 4 грани; нет 3- и 4-поясов; для любой вершины $v \in P$ противоположные грани не являются соседями для грани, которая не содержит вершину v

Пример 2.9 Пусть $P = A_n$ - антипризма. Тогда P реализуется в \mathbb{L}^3 в качестве прямоугольного идеального 3-многогранника.

Конструкция 2.10 Операция скручивания рёбер определена следующим образом:



Операция скручивания рёбер называется *ограниченной*, если скручиваются рёбра, имеющие общее соседнее ребро. После операции скручивания рёбер на грани прямоугольного идеального 3-многогранника, новый многогранник лежит в том же классе многогранников.

Утверждение 2.11 Пусть P прямоугольный идеальный 3-многогранник. Тогда либо $P = A_n$, либо P получен с помощью конечного числа ограниченных скручиваний рёбер из многогранника A_4 .

2.3 Построение группы $\text{Ker}\phi^{(k)}$ и гиперболических многообразий над прямоугольными многогранниками

Первый пример замкнутого 3-многообразия с гиперболической структурой был построен Лёбеллем в 1931г., тогда это была известная открытая проблема. В работе [17] была построена целая серия таких многообразий.

Пусть P прямоугольный многогранник конечного объёма в \mathbb{L}^n . За m обозначим число гиперграней P . Тогда прямоугольная группа Коксетера $G(P)$ задана образующими и соотношениями:

$$G(P) = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = 1, g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle$$

Группа $G(P)$ действует на \mathbb{L}^n отражениями относительно гиперплоскостей, которые содержат гиперграни P . У такого действия имеются нетривиальные стабилизаторы в гранях P , поэтому действие не свободно. На самом деле, $\mathbb{L}^n/G(P)$ представляет собой исходный многогранник.

Лемма 2.12 Пусть имеется эпиморфизм $\phi^{(k)} : G(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Подгруппа $\text{Ker}\phi^{(k)} \subset G(P)$ не содержит элементов конечного порядка.
2. Образы отражений g_{i_1}, \dots, g_{i_r} в любых r гранях F_{i_1}, \dots, F_{i_r} , имеющих непустое пересечение, линейно независимы в \mathbb{Z}_2^k .
3. Группа $\text{Ker}\phi^{(k)}$ действует свободно на \mathbb{L}^n .

В работе [17] лемма была сформулирована и доказана в более частном случае: компактные прямоугольные 3-многогранники, однако она легко обобщается на прямоугольные многогранники конечного объёма.

Определение 2.13 *Гиперболическим многообразием над многогранником P будем называть многообразие $\mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(k)}$*

Эпиморфизм $\phi^{(k)}$ допускает разложение в композицию по универсальному свойству гомоморфизма абелизации:

$$G(P) \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$$

Λ - линейное отображение \mathbb{Z}_2 -пространств. Его можно интерпретировать как матрицу с элементами из \mathbb{Z}_2 , на которую накладываются те же условия, что и на характеристическую матрицу малого накрытия над многогранником P .

В случае компактного P многообразие $\mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(n)}$ гомеоморфно малому накрытию $N(P, \Lambda)$, если многогранник P допускает характеристическую матрицу Λ .

Обозначение 2.14 *По аналогии с компактным случаем, введём обозначение $N(P, \Lambda) = \mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(n)}$ или $N(P, \Lambda) = \mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(n-1)}$, второе только если все вершины P лежат на абсолюте.*

Если же $k = m$, то $\text{Ker} \phi^{(m)} = G'(P)$. В случае компактного P снова известно, что это за пространство: $\mathbb{L}^n / G'(P) \cong \mathcal{R}_P$

В общем случае получается, что $\mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(k)}$ имеет гомотопический тип пространства Эйленберга-Маклейна $K(\text{Ker} \phi^{(k)}, 1)$. Это следует из того, что \mathbb{L}^n - стягиваемое универсальное накрытие многообразия $\mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(k)}$.

Это ещё одна мотивация к изучению когомологий многообразий вида $\mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(k)}$, ведь так получается изучить когомологии групп $\text{Ker} \phi^{(k)}$, которые тесно связаны с теорией прямоугольных групп Коксетера.

Ниже приведено полное описание гомотопического типа пространств $\mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(k)}$. Предполагается, что k таково, что существует эпиморфизм $\phi^{(k)} : G(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$ такой, что $\text{Ker} \phi^{(k)}$ свободно действует на \mathbb{L}^n .

P предполагается прямоугольным многогранником конечного объёма в \mathbb{L}^n .

Утверждение 2.15 *Многообразие вида $\mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(k)}$ деформационно ретрагируется на частичный фактор вещественного момент-угол пространства $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P} / \text{Ker} \Lambda$, где Λ получается из разложения $\phi^{(k)} : G(P) \xrightarrow{Ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$*

▷

Непосредственно проверяется, что $\mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(k)} = P \times \mathbb{Z}_2^k / \sim$, где $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \iff x_1 = x_2, t_1 \cdot t_2^{-1} \in T(x_1)$. А $T(x) = \prod_{i: x \in F_i} T_i$, где T_i подгруппа в \mathbb{Z}_2^n , порождённая вектором λ_i .

Из [20, прор 6] следует, что $\mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(k)} = P \times \mathbb{Z}_2^k / \sim$ деформационно ретрагируется на кубический комплекс C . При этом известно, что имеется взаимно однозначное соответствие между гранями копий многогранников из разложения $P \times \mathbb{Z}_2^k / \sim$ и кубами комплекса C :

$$k - \text{ грани разложения } P \times \mathbb{Z}_2^k / \sim \longleftrightarrow (n - k) - \text{ кубы комплекса } C$$

Сначала докажем наше утверждение для вещественных момент-угол пространств: пусть $k = m$, тогда $\text{Ker} \phi^{(m)} = G'(P)$. Мы собираемся проверить, что два кубических комплекса C и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$ комбинаторно устроены одинаково.

Оба комплекса имеют 2^m вершин. k -куб принадлежит комплексу $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$ тогда и только тогда, когда найдутся соответствующие k вершин в \mathcal{K}_P , которые образуют симплекс. Одному такому симплексу соответствуют 2^{m-k} k -кубов в $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$.

В то же время, k -куб принадлежит комплексу C тогда и только тогда, когда имеется соответствующая грань $F \subset P$, $\text{codim}(F) = k$, что соответствует симплексу на k вершинах в нерв-комплексе \mathcal{K}_P . И снова, как и выше, k -мерному кубу в C соответствует грань F , которой соответствуют 2^{m-k} её копий в $\mathbb{L}^n / G'(P)$, а им соответствуют 2^{m-k} k -кубов в C .

Из рассуждений выше следует, что два кубических комплекса C и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$, лежащие на 2^m вершинах, состоят из одних и тех же кубов.

Многообразие $\mathbb{L}^n / G'(P)$ деформационно ретрагируется на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$. Из доказательства [20, прор 6] видно, что эта ретракция построена на каждой копии P , вложенной в $\mathbb{L}^n / G'(P)$, то есть \mathbb{Z}_2^m -эквивариантна. $\text{Ker} \Lambda = \text{Ker} \phi^{(k)} / G'(P)$. В силу эквивариантности деформационной ретракции выше, получим деформационную ретракцию

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P} / \text{Ker} \Lambda \simeq (\mathbb{L}^n / G'(P)) / (\text{Ker} \phi^{(k)} / G'(P)) \cong \mathbb{L}^n / \text{Ker} \phi^{(k)}$$

◁

2.4 Коэн-Маколеевость симплициальных комплексов

Коэн-Маколеевость алгебры это гомологическое свойство, которое появилось задолго до возникновения торической топологии. Оно представляет самостоятельный интерес, поскольку такие алгебры допускают существование регулярной последовательности.

В случае колец когомологий гиперболических многообразий над прямоугольными многогранниками конечного объёма (см. раздел 4) эта регулярная последовательность будет порождать идеал в кольце когомологий.

Определение 2.16 Пусть A конечнопорождённая \mathbb{K} -алгебра. Её размерностью Крулля называется максимальное количество алгебраически независимых элементов

В определениях далее предполагается, что A является \mathbb{N} -градуированной алгеброй над полем \mathbb{K} или над \mathbb{Z} . Размерность Крулля A равняется n .

Пример 2.17 Пусть $A = \mathbb{K}[v_1, \dots, v_n]$. Тогда размерность Крулля $\dim A$ равна n .

Определение 2.18 Последовательность $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ однородных элементов из A называется однородной системой параметров, если размерность Крулля $A/(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ равна нулю.

Определение 2.19 Однородная система параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ алгебры R называется регулярной последовательностью, если λ_{i+1} не является делителем нуля в $A/(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$.

Имеется следующее эквивалентное определение регулярной последовательности.

Определение 2.20 Последовательность алгебраически независимых элементов $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ называется регулярной последовательностью, если R является конечномерным свободным $\mathbb{K}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ -модулем.

Определение 2.21 Алгебра A называется алгеброй Коэна-Маколея, если она допускает регулярную последовательность t_1, \dots, t_n длины $n = \dim A$.

Определение 2.22 Симплициальный комплекс на множестве $[m]$ называется Коэн-Маколеевым над \mathbb{K} , если $\mathbb{K}[K]$ является Коэн-Маколеевым.

Имеется удобный критерий Коэн-Маколеевости, доказанный Рейснером в [13].

Утверждение 2.23 Кольцо $\mathbb{K}[K]$ Коэн-Маколеево над \mathbb{K} тогда и только тогда, когда для любого симплекса $\sigma \in K$ выполнено $\tilde{H}_i(\text{link}(\sigma); \mathbb{K}) \cong 0$, где $i < \dim(\text{link}(\sigma))$

2.5 Достаточное условие существования расслоения над окружностью

Имеется конструкция из [1], которая даёт достаточное условие существования расслоения многообразий $N(P, \Lambda_c)$, построенных по раскраске Λ_c многогранника P в c цветов, над окружностью.

Пусть P - трёхмерный идеальный прямоугольный многогранник конечного объёма. Для него существует шахматная раскраска, которая определяется однозначно с точностью до взаимной замены двух цветов. За $N(P)$ будем обозначать многообразие, построенное по шахматной раскраске P .

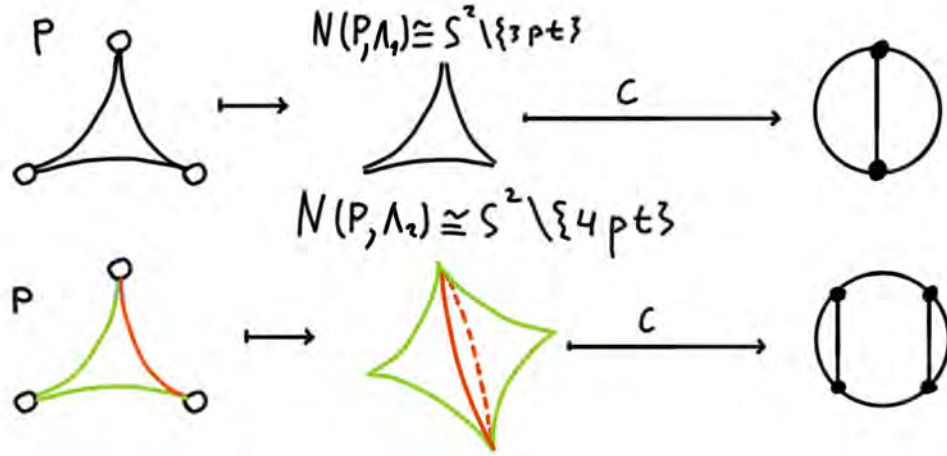
В общем случае многогранник P предполагается реализованным в \mathbb{L}^n с прямыми углами между гранями, P имеет конечный объём.

Определение 2.24 Состоянием на многограннике P называется выбор на гранях символов I или O , символ на грани будем также называть состоянием грани.

Раскраска многогранника P в c цветов порождает свободное действие группы \mathbb{Z}_2^c на множестве всех состояний на P . Элемент $e_i \in \mathbb{Z}_2^c$ меняет I на O , а O на I на тех гранях, которые покрашены в цвет $i \in \{1, 2, \dots, c\}$, состояния на остальных гранях не меняются.

Выбор состояния на P является дополнительной комбинаторной структурой, по которой можно однозначно построить непрерывное отображение $N(P, \Lambda_c) \rightarrow S^1$, что будет объяснено ниже.

Конструкция 2.25 Многообразие $N(P, \Lambda_c)$ разбито на 2^c копий многогранника P . Будем обозначать эти копии так: P_v , где $v \in \mathbb{Z}_2^c$. Так как многогранники прямоугольные, такое разбиение двойственно кубическому комплексу C на 2^c вершинах, C вложен в $N(P, \Lambda_c)$. На примере идеального треугольника, раскрашенного в один цвет и раскрашенного в два цвета, конструкция выглядит так:



Дополнение $N(P, \Lambda_c) \setminus C$ состоит из открытых каспов, и имеется деформационная ретракция $r : N(P, \Lambda_c) \rightarrow C$.

Вершины комплекса C будем обозначать как $v \in \mathbb{Z}_2^c$. Рёбра C двойственны граням разбиения многообразия $N(P)$: вершины v и $v + e_i$ соединены ребром, если двойственная грань F покрашена в цвет i .

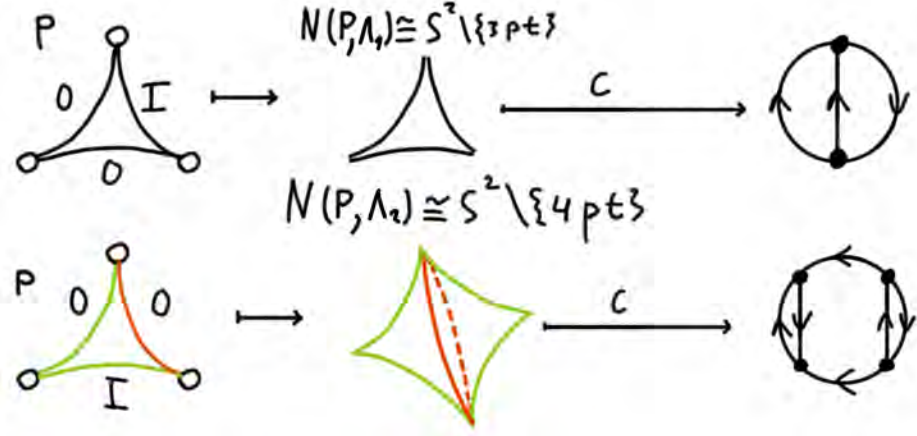
Состояние на грани F позволяет ориентировать полученное ребро. Пусть i -я компонента $v \in \mathbb{Z}_2^c$ равна нулю. Если грань имеет состояние I , то ребро направлено к v , от $v + e_i$. Если состояние O , то ориентация противоположная.

Такая ориентация 1-остова комплекса C обладает свойством согласованности: каждый квадрат ориентирован так, что ориентация противоположных рёбер совпадает. А значит, для любого k -мерного куба комплекса C выполнено свойство: при вложении куба в \mathbb{R}^k таким образом, чтобы рёбра были параллельны координатным осям, рёбра куба, которые параллельны друг другу, ориентированы одинаково. Это свойство позволяет определить диагональное отображение на одном квадрате и распро-

страницать его на весь комплекс C :

$$d : [0, 1]^k \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad x \mapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

Предполагается, что $[0, 1]^k$ вложен в \mathbb{R}^k таким образом, чтобы каждая стрелка из ориентации 1-остова куба была направлена в сторону увеличения соответствующей координаты. Ниже приведен рисунок, демонстрирующий устройство ориентации на C :



Замечание 2.26 На самом деле, $C = \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P} / \text{Ker} \Lambda$, как следует из Утверждения 2.12

Итого фиксированное состояние (но произвольное) на многограннике P даёт некоторое непрерывное отображение:

$$N(P) \xrightarrow{\tau} C \xrightarrow{d} S^1$$

Имеется достаточное условие (Утверждение 2.26) того, чтобы отображение $p = d \circ \tau$ было гомотопным локально-тривиальному расслоению.

Грани многогранника P соответствуют вершинам комплекса \mathcal{K}_P . Состояния на гранях P переходят в состояния на вершинах \mathcal{K}_P . Введём следующее обозначение: $\text{link}_O(\mathcal{K}_P)$ полный подкомплекс в \mathcal{K}_P на вершинах состояния O . Аналогично определяется подкомплекс $\text{link}_I(\mathcal{K}_P)$.

Рассмотрим гомоморфизм $p_* : \pi_1(N(P)) \rightarrow \mathbb{Z}$, обозначим $H = \text{Ker } p_*$.

Определение 2.27 Состояние s на гранях многогранника P будем называть:

1. Правильным, если $\text{link}_I(\mathcal{K}_P)$ и $\text{link}_O(\mathcal{K}_P)$ связны и, при этом, остаются связными при действии группы \mathbb{Z}_2^c на состояние s .
2. 1-правильным, если $\text{link}_I(\mathcal{K}_P)$ и $\text{link}_O(\mathcal{K}_P)$ односвязны и, при этом, остаются одсвязными при действии группы \mathbb{Z}_2^c на состояние s .

Отметим, что в нашем случае гомоморфизм p_* будет нетривиальным с образом $Im(p_*) = 2\mathbb{Z}$ [1, Утверждение 12].

Замечание 2.28 Обозначим состояние на многограннике P как s . Все другие состояния, которые получаются из исходного действием группы \mathbb{Z}_2^2 , будем обозначать так: s_g , где $g \in \mathbb{Z}_2^2$. Очевидно, что $s_0 = s$.

Утверждение 2.29 Пусть $\dim P = 3$.

1. Если P допускает правильное состояние на гипергранях, многообразие $N(P)$ расслаивается над окружностью S^1 .
2. Если P допускает 1-правильное состояние на гипергранях, многообразие $N(P)$ расслаивается над окружностью S^1 . Расслоение можно сгладить.

▷

Сначала докажем первую часть утверждения

Из [1, Теорема 16] следует, что связности линков достаточно для того, чтобы группа H была конечнопорождена.

Срежем каспы многообразия $N(P)$. Получим компактное гиперболическое $M(P)$ многообразие с асферическим краем (несвязное объединение 2-мерных торов, так как каспы были торическими). К такому многообразию применима теорема Столлинга [21] (чуть более общая формулировка, чем классическая теорема Столлинга [22], где многообразия предполагались без края). Поэтому $M(P)$ расслаивается над окружностью.

Каспы $N(P)$ представляют собой многообразия вида $(0, +\infty) \times \mathbb{T}^2$. Пусть построено расслоение

$$\Sigma \rightarrow M(P) \rightarrow S^1$$

Так как расслоение над отрезком тривиально, любое многообразие, допускающее расслоение над окружностью, является тором некоторого гомеоморфизма слоя на себя: $M(P) \cong T_f = \frac{I \times \Sigma}{(0,x) \sim (1,f(x))}$ и естественным образом расслаивается над окружностью.

Граница тора отображения - тор отображения f , ограниченного на границу Σ : $\partial T_f = T_{f|_{\partial \Sigma}}$. Поскольку многообразие $N(P)$ имеет торические каспы, ∂T_f представляет собой объединение двумерных торов \mathbb{T}^2 (в количестве, равном числу вершин многогранника P)

Отображение расслоения на границе $\partial T_f = T_{f|_{\partial \Sigma}}$ устроено следующим образом $\hat{p} : T_{f|_{\partial \Sigma}} \rightarrow S^1$, $(i, x) \mapsto i \in I/0 \sim 1 = S^1$ (\hat{p} является ограничением $p|_{\partial T_f}$)

Поскольку $M(P)$ и $\partial M(P)$ расслаиваются над окружностью одновременно, и последнее расслоение получается ограничением первого, $M(P) \setminus \partial M(P)$ так же расслаивается над окружностью (со слоем $\Sigma \setminus \partial \Sigma$). Но $M(P) \setminus \partial M(P)$ гомеоморфно $N(P)$.

Теперь докажем вторую часть утверждения. Кратко изложим подход, реализованный в статьях [1, 20] (см пункт 2.8 статьи [1]).

Пусть P допускает 1-правильное состояние. Непосредственно проверяется, что выполнены условия из [20, Теорема 15]. Отсюда следует, что отображение p сглаживается до совершенной S^1 -значной функции Морса, то есть имеет $|\chi(N(P))|$ критических точек (наименьшее возможное количество). Но в нашем случае всегда $\chi(N(P)) = 0$, как следует из [1, Раздел 2.7, Формула (1)], поэтому отображение p сглаживается до S^1 -значной функции Морса без критических точек, то есть, до гладкого расслоения над S^1 . \triangleleft

Стоит отметить, что пункт 1 Утверждения 2.29 напрямую невозможно напрямую обобщать на старшие размерности потому, что в теореме Столлинга размерность, равная трём, - существенное условие.

А второй пункт невозможно обобщать напрямую потому, что при доказательстве [20, Теорема 15] используется тот факт, что Морсовское PL -разложение многообразия на ручки можно сгладить, если размерность многообразия не превосходит 4. Но в размерности 4 гиперболические многообразия конечного объёма никогда не расслаиваются над окружностью, поэтому мы снова ограничены размерностью 3.

Замечание 2.30 *Выбор состояния I или O на гранях многогранника P соответствует выбору состояния вершин нерв-комплекса K_P . Далее будем изучать состояния многогранника с помощью нерв-комплексов. Для упрощения обозначений состояние I на вершине нерв-комплекса будет обозначено жирной чёрной точкой. Состояние O будет обозначаться как выколотая точка.*

Замечание 2.31 *Заметим, что для того, чтобы проверить состояние s на гранях P на правильность (1-правильность), достаточно сначала проверить связность (односвязность) линков состояний $s = s_0$ и s_{e_1} , $e_1 \in \mathbb{Z}_2^2$.*

Проверять связность (односвязность) линков двух оставшихся состояний s_{e_2} и $s_{e_1+e_2}$ не нужно потому, что они получаются действием элемента e_1+e_2 на состояния s_{e_1} и s соответственно. А действие элемента e_1+e_2 соответствует замене $I \longleftrightarrow O$ на гранях исходного многогранника и, естественно, сохраняет связность (односвязность) линков.

3 Расслоение гиперболических 3-многообразий над окружностью

Далее в этом разделе по умолчанию считается, что P^3 трёхмерный прямоугольный многогранник конечного объёма, все вершины которого лежат на абсолюте. Будем рассматривать 3-многообразия $N(P^3)$, построенные по шахматной раскраске граней P^3 в 2 цвета.

Для начала покажем, что на многих многогранниках несложно построить 1-правильные состояния.

Пример 3.1 *На следующих многогранниках имеются 1-правильные состояния:*

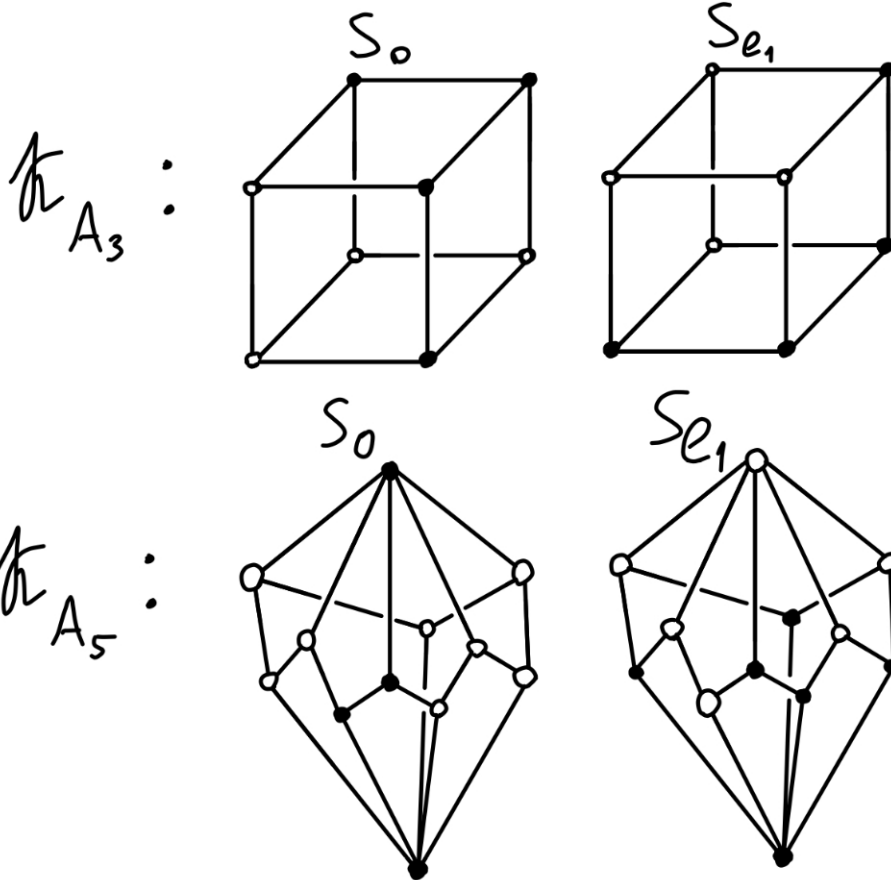
1. P является антрипризмой, A_n , $n \geq 3$.

2. P получено с помощью одной операции скручивания рёбер в антипризме A_n , $n \geq 4$.

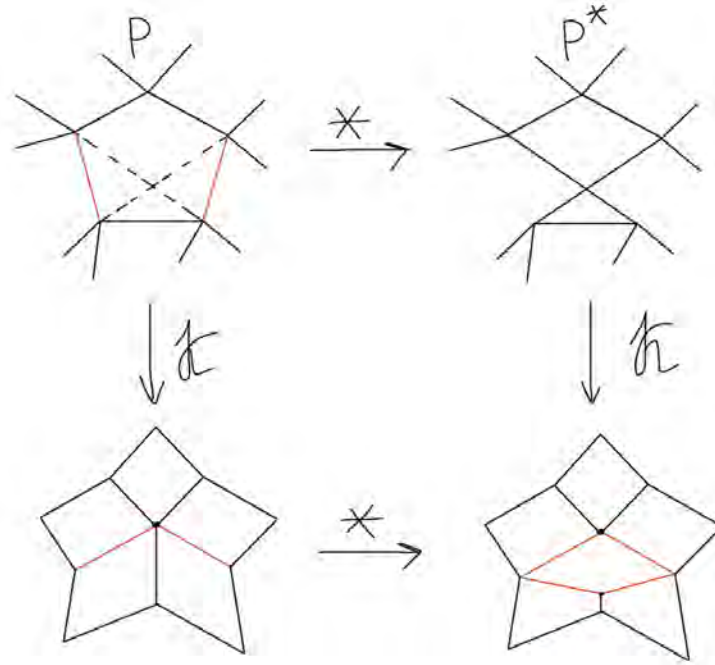
Следовательно, $N(P)$ расслаивается над S^1 , а само расслоение можно сгладить по Утверждению 2.29.

▷

1. На рисунках ниже построены правильные состояния на нерв-комплексе идеального октаэдра и 5-антипризмы. На произвольной n -антипризме состояние выбирается аналогичным образом: выбираются четыре тёмные точки (путь от одной вершины, из которой выходят n рёбер, до другой), а все остальные выбираются выколотыми. Линки состояний s_0 и s_{e_1} односвязны. По замечанию 2.29 этого достаточно, чтобы утверждать, что состояния s_{e_2} и s_{e_1} односвязны.



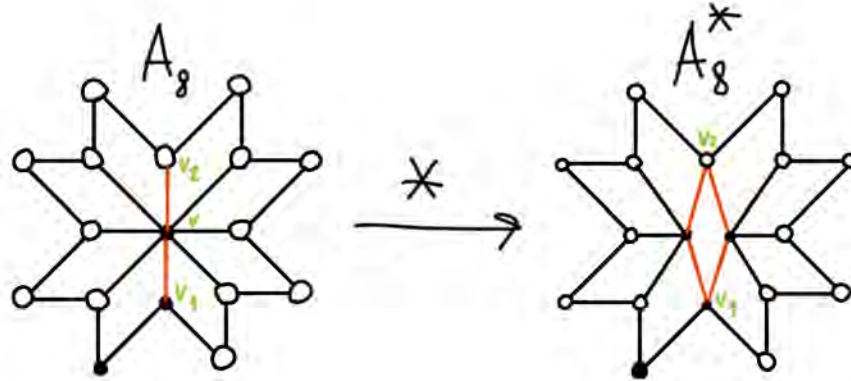
2. Скручивание рёбер понятным образом отражается на нерв-комплексе удвоением одной вершины в \mathcal{K}_P (см картинку ниже).



На всех антипризмах построены 1-правильные состояния. При одной операции скручивания рёбер получается новый многогранник, нерв-комплекс которого имеет удвоенную вершину, на котором можно построить 1-правильное состояние, опираясь на предыдущее состояние на A_n , где $n \geq 4$.

При одной операции скручивания рёбер антипризмы A_n $n \geq 4$ возможно получить $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ комбинаторно разных многогранников: скручивать можно любые два ребра на верхнем основании антипризмы (нижнее основание можно не рассматривать ввиду симметрии A_n), одно ребро можно зафиксировать (снова ввиду симметрии A_n), а второе ребро пробегает ровно $\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$ возможных вариантов, которые не переводятся друг в друга с помощью симметрии A_n .

На картинке ниже приведён пример с антипризмой A_8 . При скрутке около вершины $v \in \mathcal{K}_P$ всегда можно предполагать (ввиду симметрий A_8), что соседние вершины, затрагиваемые операцией скручивания рёбер, имеют различные цвета. Несложно непосредственно проверить, что после такой операции состояние на новом многограннике будет 1-правильным.



◁

Теперь сформулируем и докажем теорему, которая позволяет по уже известным многогранникам P и 1-правильным (правильным) состояниям получать новые многогранники и 1-правильные (правильные) состояния на них. Как только на P построено правильное (1-правильное) состояние, сразу получаем, что $N(P)$ расслаивается над окружностью.

Определение 3.2 Пусть P, Q прямоугольные идеальные 3-многогранники, на множестве граней которых зафиксированы некоторые состояния $s(P)$, $s(Q)$. Будем называть $s(P)$ и $s(Q)$ согласованными вдоль граней $F_1 \subset P$ и $F_2 \subset Q$, если существуют $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}_2^2$ такие, что:

1. Грани F_1 и F_2 комбинаторно эквивалентны
2. Состояния $g_1 \circ s(P)$ и $g_2 \circ s(Q)$ принимают различные значения на гранях F_1, F_2 .
3. Состояния $g_1 \circ s(P)$ и $g_2 \circ s(Q)$ принимают такие значения на гранях, соседних с F_1 и F_2 соответственно, что можно взять связную сумму P и Q вдоль граней F_1 и F_2 таким образом, чтобы те грани, соседние с F_1, F_2 , которые склеивались бы в связной сумме, имели бы одинаковые состояния

Таким образом, если есть два многогранника и состояния на них такие, что они согласованы вдоль некоторых граней, мы однозначным образом можем построить состояние на связной сумме многогранников:

Теорема 3.3 Пусть P прямоугольный идеальный 3-многогранник. Тогда верны следующие утверждения:

1. Пусть на гранях P существует правильное (1-правильное) состояние s . Выберем произвольную грань F , которая не является треугольником. Пусть F_1, F_2 - такие грани, что:

(a) $F_1 \cap F \neq \emptyset, F_2 \cap F \neq \emptyset, F_1 \cap F_2 = \emptyset$

(b) Состояния на F_1 и F_2 различны

Тогда при скручивании рёбер $l_1 = F_1 \cap F, l_2 = F_2 \cap F$ грани F получаем многогранник P^* , на котором существует правильное (1-правильное) состояние.

2. Пусть Q прямоугольный идеальный 3-многогранник. Пусть на P, Q существуют состояния $s(P), s(Q)$ такие, что:

(a) Либо $s(P)$, и $s(Q)$ являются правильными (1-правильными) состояниями, либо одно из них правильное, а другое 1-правильное

(b) $s(Q)$ и $s(P)$ согласованы вдоль граней $F_1 \subset P$ и $F_2 \subset Q$

Тогда, в случае, если $s(P)$, и $s(Q)$ 1-правильные, на $P \#_{F_1, F_2} Q$ существует 1-правильное состояние. В других двух случаях на $P \#_{F_1, F_2} Q$ существует правильное состояние

3. Пусть на гранях P существует 1-правильное состояние. Тогда имеется расслоение

$$\Sigma^2 \rightarrow N(P^3) \rightarrow S^1$$

где Σ^2 является сферой с k проколами. Количество проколов в точности совпадает с количеством вершин многогранника P , а расслоение всегда можно сгладить.

▷

1. Пусть операция скручивания рёбер происходит на грани F , которая соответствует вершине $v \in \mathcal{K}_P$. Скручивание затрагивает не только вершину v , но и две соседние вершины, которые мы обозначим как v_1 и v_2 . Рёбра, соединяющие v и v_1 ; v и v_2 , двойственны к рёбрам $l_1, l_2 \subset P$ соответственно.

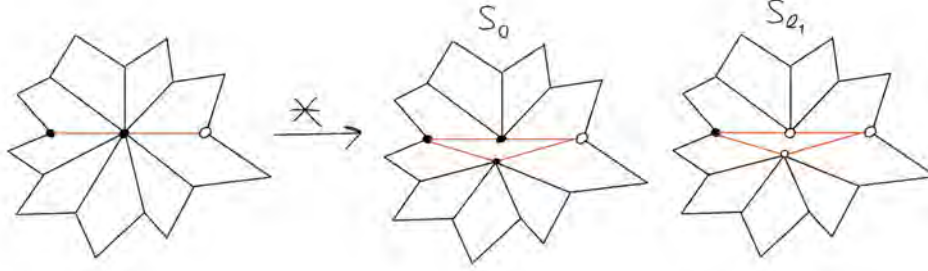
Рассмотрим варианты того, как могут быть покрашены вершины v, v_1, v_2 . Эти три вершины могут быть либо чёрными, либо проколотыми. Итого 8 вариантов.

Перебором получаем, что в 4 случаях вершина v и одна вершина из двух вершин v_1, v_2 имеют одинаковый цвет, в то время, как третья вершина имеет другой цвет. В этих 4 случаях удаётся построить правильное (1-правильное) состояние после удвоения вершины v .

На рисунке показано, как нужно строить состояние. На всех вершинах, где состояния не отмечены, состояния наследуются из состояний нерв-комплекса \mathcal{K}_P .

Видно, что связность в состоянии s_0 не нарушается: линк проколотых вершин не изменился, а был связан, а линк чёрных вершин получил удвоение одной из вершин, поэтому тоже остаётся связным. В состоянии $e_1 \circ s_0$ все те же рассуждения, с точностью до замены черных на проколотые вершины и наоборот, дают связность линков. А значит получаем, что состояние

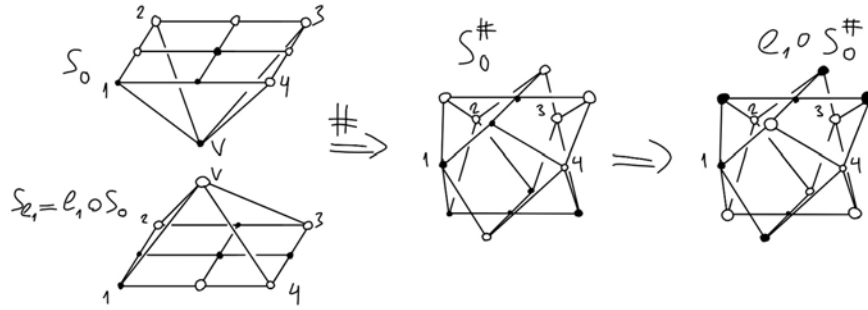
s_0 правильное (или даже 1-правильное, если исходное состояние s было 1-правильным).



2. Покажем построение правильного состояния на примере антипризмы A_4 . При взятии связной суммы вершины v будут удалены из обеих копий комплекса K_{A_4} , а вершины 1, 2, 3, 4 из обеих копий отождествятся между собой.

Пусть выбрано состояние s_0 на одной из копий K_{A_4} . На другой копии выберем состояние $s_{e_1} = e_1 \circ s_0$. Получили состояние $s_0^\#$ на комплексе $K_{A_4 \# A_4}$. Связность линков очевидна. Осталось проверить связность линков после действия элемента $e_1 \in \mathbb{Z}_2^2$ на состояние $s_0^\#$.

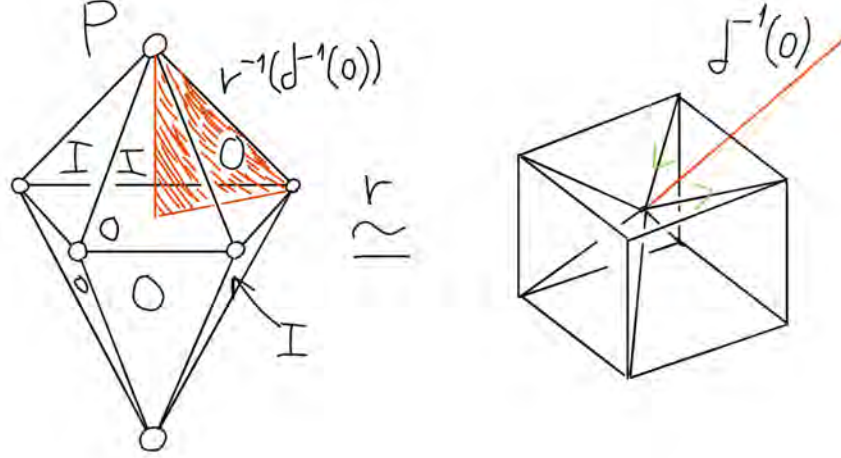
Пусть грани многогранника $A_4 \# A_4$, соответствующие вершинам 1, 2, 3, 4, покрашены так, что при действии e_1 на состояние $s_0^\#$, состояние вершин 1, 2, 3, 4 не меняется. Тогда те вершины, которые находились в первой копии K_{A_4} , поменяют свои состояния на состояния тех вершин, которые находились во второй копии K_{A_4} , и наоборот. То есть, при таком действии, благодаря симметрии комплекса $K_{A_4 \# A_4}$, состояние $e_1 \circ s_0^\#$ будет иметь связные линки.



Итого получили, что построенное состояние $s_0^\#$ на комплексе $K_{A_4 \# A_4}$ правильное. Абсолютно аналогично строится состояние и для произвольных многогранников P, Q и состояний $s(P), s(Q)$. В случае, если хотя бы одно из состояний $s(P), s(Q)$ не будет 1-правильным, итоговое состояние на связной сумме $P \#_{F_1, F_2} Q$ так же не будет 1-правильным, но будет правильным.

3. Посчитаем слой расслоения p в случае, когда линки $link_O(K_P)$ и $link_I(K_P)$ (одно)связны.

Слоем расслоения p является множество $F = \bigcup_{v \in \mathbb{Z}_2^2} S_v$, где S_v - конус над множеством рёбер многогранника P_v , $v \in \mathbb{Z}_2^2$, которые лежат между гранями с состояниями I и O .



Поймём это на примере с октаэдром. На картинке нарисована ретракция идеального октаэдра на конус над 1-остовом 3-куба. Многообразие $N(P)$, построенное по шахматной раскраске, над идеальным октаэдром, ретрагируется на вещественное торическое пространство точно таким же способом. Красной линией нарисован прообраз $d^{-1}(0)$ диагонального отображения (то, что взята именно красная диагональ, диктуется выбором состояний на гранях P , откуда строится ориентация кубического комплекса: см зеленые стрелки на рисунке). Далее смотрим прообраз при ретрации r и получаем красный треугольник с 2 проколами.

При взятии всех прообразов в P_0 получим диск D с 6 выброшенными точками на границе. Рассмотрим копию $P_{e_1+e_2}$. Засчёт того, что состояния поменяются с O на I , и наоборот состояния с I меняются на O , множество рёбер, которые лежат между гранями с состояниями I и O , будут склеиваться с рёбрами, которые лежат на границе диска D .

То есть, прообраз нуля при расслоении в копиях $P_0 \subset N(P)$ и $P_{e_1+e_2} \subset N(P)$ представляет собой сферу с 6 проколами. Две другие копии дают ещё одну сферу с 6 проколами. То есть, слой расслоения p - это несвязное объединение двух сфер с 6 проколами. Взяв композицию расслоения $p : N(P) \rightarrow S^1$ с двулистным накрытием $f : S^1 \rightarrow S^1$, мы получим расслоение многообразия $N(P)$ над окружностью S^1 , а слоем будет двумерная сфера с 6 проколами.

Аналогичная ситуация и с произвольным прямоугольным идеальным 3-многогранником P .

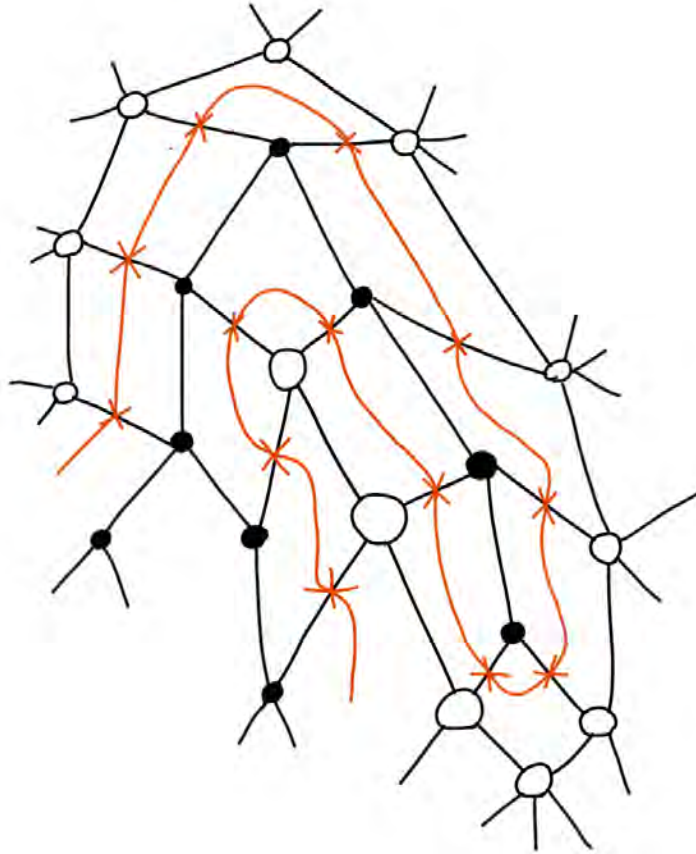
Множество $F = \bigcup_{v \in \mathbb{Z}_2^2} S_v$ представляет собой несвязное объединение двух сфер с проколами в количестве вершин P . Сферы возникают потому, что

все рёбра между гранями с разными состояниями образуют цикл точно так же, как и для идеального октаэдра.

Проверим, что рёбра в P между гранями с разными состояниями действительно образуют цикл. Так как состояние на P оказалось 1-правильным (правильным), линки в \mathcal{K}_P представляют собой деревья (либо графы, отличающиеся от деревьев лишь тем, что вместо некоторых вершин допускаются 4-циклы).

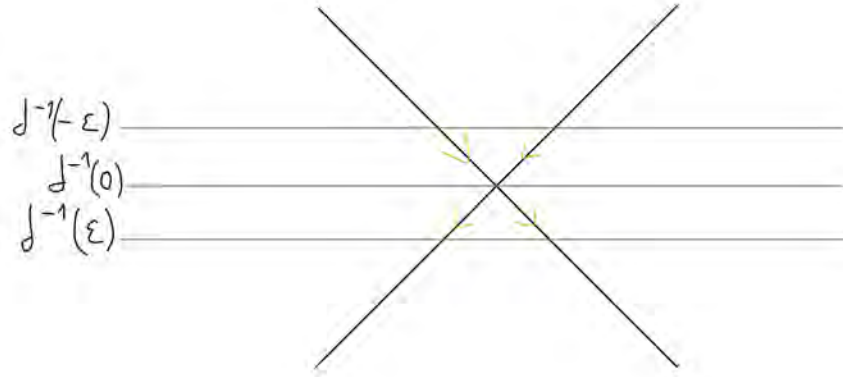
Так как состояние на P является 1-правильным (правильным), у каждой вершины v в \mathcal{K}_P есть соседняя вершина w такая, что состояния на v и w различны. Если это было бы не так, то нашёлся бы элемент $g \in \mathbb{Z}_2^2$ такой, что вершина v не имела бы ни одной соседней вершины, которая имела бы то же состояние, что и $v \implies$ вершина v была бы изолированной, что противоречит условиям на наше состояние.

То есть, мы имеем граф \mathcal{K}_P , лежащий на 2-сфере, в котором имеются два связных подграфа, вершины которых соединены рёбрами таким образом, что каждая вершина одного из двух подграфов связана ребром с какой-нибудь из вершин другого подграфа. И эти связующие рёбра между подграфами соответствуют рёбрам многогранника P , которые лежат между гранями с противоположными состояниями. На рисунке ниже эти связующие рёбра отмечены красными крестами.

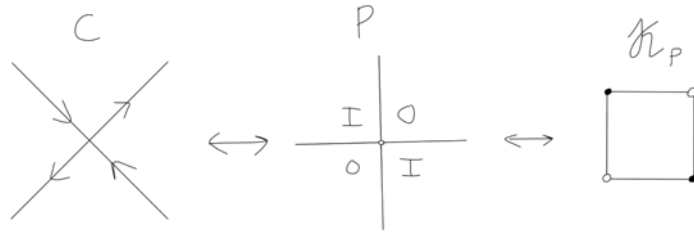


Два креста соединены ребром, если они лежат на рёбрах одного 4-цикла в \mathcal{K}_P . В многограннике P это соответствует тому, что два ребра (каждое лежит в двух гранях с противоположными состояниями) соединены через идеальную вершину.

Осталось проверить, что наше отображение $p = r \circ d$ является локально-тривиальным расслоением. Рассмотрим наш кубический комплекс около любой из вершин (например, можно сравнить с идеального октаэдра, 1-правильное состояние см в Примере 3.1):



Около вершины мы всегда имеем ровно четыре ориентированных отрезка комплекса C (так как все вершины являются пересечением четырёх граней). Сначала рассмотрим прообраз нуля при диагональном отображении d (на самом деле, несложно проверить, что около любой вершины прообраз нуля выглядит именно так, как на рисунке). $d^{-1}(0)$ ориентация четырёх отрезков (отмечена жёлтым цветом) происходит из состояний на гранях многогранника P . Левые 2 ребра возможно ориентировать ровно 2 способами (так как $d^{-1}(0)$ горизонтальна) - так же, как и правые два. Но, на самом деле, 2 из 4 вариантов такой ориентации невозможны потому, что мы предполагаем наше состояние 1-правильным (см рисунок ниже: $\exists g \in \mathbb{Z}_2^2$ такое, что при действии g на наше состояние получим 4-цикл на \mathcal{K}_P из проколотых или жирных точек). Итого из 4 состояний: 2 невозможны, а по двум другим видно, что прообраз диагонального отображения локально одинаков. То есть, наше отображение $p = r \circ d$ является локально тривиальным расслоением, а слой - сфера с k проколами, k - число вершин.



◁

Пример 3.4 Для следующих многогранников P применима Теорема 3.3:

1. $P = A_k^{\#n} = A_k \# \dots \# A_k$ - связная сумма берётся вдоль оснований антипризм
2. $P = (A_k^{\#n})^*$ - многогранники из прошлого пункта позволяют сделать одну операцию скручивания рёбер (на верхнем или нижнем основании многогранника $A_k^{\#n}$, снова используя симметрии)

Замечание 3.5 На самом деле, очевидно, что в разделе описан далеко не полный класс тех многогранников, которые допускают 1-правильные (правильные) состояния потому, что мы никак не опирались на симметрии многогранников (кроме пункта 2 Примера 3.1 и пункта 3 Примера 3.4). К тому же, целиком не описан класс, который позволяет получить Теорема 3.3.

Как видно из Примера 3.1, группа симметрий $Sym(P)$ многогранника P действует на состояние s многогранника P . При этом очевидно, что топологические свойства состояния s сохраняются после действия некоторой симметрии на него: в частности, связность и односвязность линков.

4 Кольца \mathbb{Z}_2 -когомологий

Дэвис и Янушкевич в [2] считали когомологии малых накрытий и квазиторических многообразий над прострым многогранником P из соображений вырождения во втором листе спектральной последовательности Лере-Серра расслоения

$$N(P, \Lambda) \longrightarrow E\mathbb{Z}_2^n \times_{\mathbb{Z}_2^n} N(P, \Lambda) \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^n$$

Можно проверить, что доказательство Дэвиса и Янушкевича работает и для гиперболических многообразий над некомпактными прямоугольными многогранниками конечного объёма (в случае Коэн-Маколеевого нервно-комплекса \mathcal{K}_P), но ниже будет приведено более простое доказательство с использованием дга-модели Франца [6].

Всюду в этом разделе будем предполагать, что $n = \dim P$.

Следующая лемма доказана в статье [3, Утверждение 4.3] в случае произвольного выпуклого многогранника P . Мы опустим некоторые комбинаторные результаты леммы, так как для доказательства Коэн-Маколеевости нам интересен только гомотопический тип линков. Ниже приведено обобщение, доказанное аналогично [3]. Предполагается, что теперь в многограннике некоторые вершины могут отсутствовать. Например, такие многогранники возникают в пространстве Лобачевского, где часть вершин может лежать на абсолюте.

Пусть имеется следующее отображение

$$\sigma : CatP \longrightarrow \mathcal{K}_P, \sigma(F) = \{i | F \subseteq F_i\}$$

Ниже предполагается, что $\dim F \neq 0$, так как иначе $link(\sigma(F)) = \emptyset$.

Лемма 4.1 Пусть F грань многогранника P . Рассмотрим симплекс $\sigma(F)$ и его линк $L_{\sigma(F)} = link(\sigma(F))$ в симплицциальном комплексе \mathcal{K}_P . Тогда $L_{\sigma(F)}$ гомотопически эквивалентен сфере $S^{\dim F - 1} \setminus \{r\}$ без некоторого числа точек r , которое совпадает с числом удалённых вершин у грани F .

▷

Обозначим за $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ множество гиперграней многогранника P . Как и ранее предполагается, что лишних гиперграней в \mathcal{F} нет.

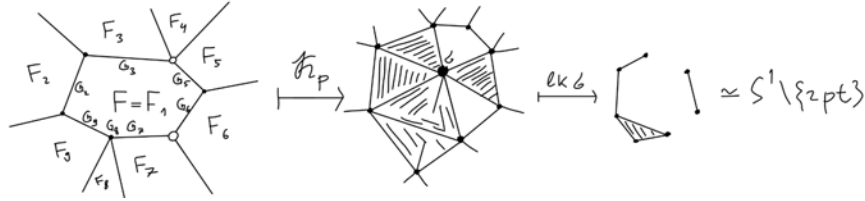
Имеем $F = \bigcap_{i \in \sigma(F)} F_i$ и $F \not\subseteq F_j$, если $j \notin \sigma(F)$ - по определению функции σ . Граница ∂F покрыта множествами $G_j = F_j \cap F = F_j \cap (\bigcap_{i \in \sigma(F)} F_i)$, так как каждая точка границы ∂F содержится в некоторой гиперграней, не содержащей F . Множества G_j не покрывают саму грань F , так как ни одно из них не содержит F . Мы утверждаем, что нерв покрытия $\{G_j\}$ совпадает с комплексом $L_{\sigma(F)}$. Имеется ряд следующих эквивалентных утверждений:

$$\begin{aligned} G_{j_1} \cap \dots \cap G_{j_s} \neq \emptyset &\iff F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_s} \cap (\bigcap_{i \in \sigma(F)} F_i) \neq \emptyset \iff \\ &\iff \{j_1, \dots, j_s\} \sqcup \sigma(F) \in \mathcal{K}_P \iff \{j_1, \dots, j_s\} \in L_{\sigma(F)} \end{aligned}$$

Множества G_j и их всевозможные пересечения выпуклые, поэтому покрытие $\{G_j\}$ стягиваемо, и его нерв гомотопически эквивалентен ∂F . Каждая отсутствующая вершина в грани F лежит на границе ∂F , отсюда следует:

$$L_{\sigma(F)} \simeq \partial F \simeq S^{\dim F - 1} \setminus \{r \text{ pt}\}$$

Ниже лемма продемонстрирована для 2-грани 3-мерного многогранника, удалены 2 вершины :



◁

Утверждение 4.2 Пусть многогранник P является некомпактным n -мерным многогранником Коксетера. Тогда:

1) Если из P удалить все вершины, не лежащие на абсолюте, его нерв-комплекс \mathcal{K}_P будет Коэн-Маколеевым. В частности нерв-комплекс идеального многогранника Коксетера Коэн-Маколеев.

2) Пусть P , имеет только одну вершину на абсолюте. Тогда нерв-комплекс \mathcal{K}_P Коэн-Маколеев.

3) Если идеальных вершин больше одной, а многогранник P не является идеальным, свойство Коэн-Маколеевости выполняться не будет.

▷

Сначала проверим 1 пункт утверждения. \mathcal{K}_P является $(n - 2)$ -мерным чистым комплексом, если любая грань F представлена в виде пересечения $\text{codim} F$ гиперграней.

Многогранник Коксетера комбинаторно в гранях (кроме идеальных вершин) выглядит как куб. Куб простой многогранник, и у него любая грань F представляется в виде пересечения $\text{codim} F$ гиперграней, значит $\dim \mathcal{K}_P =$

$n - 2$, а все максимальные симплексы имеют одинаковую размерность и комплекс чистый, поэтому можем легко считать размерность линков:

$$\dim(\text{link}(\sigma(F))) = \dim(\mathcal{K}_P) - \text{codim} F$$

Нужно проверить следующие равенства на гомологии:

$$\tilde{H}_i(\text{link}(\sigma(F))) = 0 \quad \forall i < \dim(\text{link}(\sigma(F)))$$

По **Лемме 4.1** $\text{link}(\sigma(F))$ представляет собой сферу без некоторого набора точек, то есть гомотопически это букет из некоторого числа сфер: $\text{link}(\sigma(F)) \simeq \bigvee S^{\dim F - 2}$, $\dim F > 2$.

Если $\dim F = 2$, то получается окружность без некоторого набора точек, гомотопически это набор точек. Если $\dim F = 1$, то $\text{link}(\sigma(F))$ представляет собой либо 1 точку, либо 2, либо является пустым множеством. Если $\dim F = 0$, то $\text{link}(\sigma(F)) = \emptyset$. Во всех случаях, когда $\dim F < 3$, $\dim(\text{link}(\sigma(F)))$ равно 0 или 1. То есть, условие на гомологии линка выполняется.

Пусть $\dim F \geq 3$. Гомомологии линка $\text{link}(\sigma(F))$ во всех случаях нулевые до размерности $\dim F - 2$, так как $\text{link}(\sigma(F)) \simeq \bigvee S^{\dim F - 2}$. То есть, нужно проверить, что на размерность линка выполнено следующее неравенство

$$\dim F - 2 \geq \dim(\text{link}(\sigma(F)))$$

$$\dim(\text{link}(\sigma(F))) = \dim(\mathcal{K}_P) - \text{codim} F = (n - 2) - (n - \dim F) = \dim F - 2$$

Теперь проверим 2 часть утверждения. Пусть многогранник P некомпактный с 1 идеальной вершиной.

Если многогранник P имеет размерность n , то нерв-комплекс \mathcal{K}_P представляет из себя триангулированную сферу S^{n-1} с вырезанным триангулированным шаром D^{n-1} - идеальная вершина соответствует триангулированной сфере $\mathcal{S} = S^{n-2} = \partial D^{n-1}$, которая является подкомплексом в \mathcal{K}_P .

Это соответствие следует из того, что все грани $F \subset P$ (за исключением одной идеальной вершины) комбинаторно устроены как грани простого многогранника: любая грань $F \subset P$ является пересечением $\text{codim} F$ гиперграней. То есть, каждое ребро, выходящее из идеальной вершины, даёт $(n - 2)$ -мерный симплекс в нерв-комплексе и все эти симплексы образуют триангуляцию сферы \mathcal{S} .

Линки показывают локальную структуру симплициального комплекса. Поэтому достаточно проверить, что $H_i(lk(\sigma)) = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}, i < \dim(lk(\sigma))$.

Если $\sigma \in \mathcal{S}$, то $lk(\sigma)$ состоит из симплексов 2 типов: одни лежат в \mathcal{S} и образуют сферу $S^{n-2-\dim \sigma}$, а другие в $\mathcal{K}_P \setminus \mathcal{S}$ и образуют часть сферы $S^{n-1-\dim \sigma}$ с границей $S^{n-2-\dim \sigma}$. Линки являются стягиваемыми множествами, поэтому приведённые гомологии нулевые в любой размерности.

Итого все линки имеют нулевые приведённые гомологии в нужных размерностях, поэтому нерв-комплекс многогранника Коксетера с одной идеальной вершиной Коэн-Маколеев.

Пусть есть $r > 1$ идеальных вершин, но P не является идеальным. Тогда \mathcal{K}_P это сфера S^{n-1} с r непересекающимися дырками - это снова триангулированные сферы, а значит $\mathcal{K}_P \simeq \bigvee_{r-1} S^{n-2}$. Линк пустого множества это \mathcal{K}_P - $(n-1)$ -мерный комплекс, у которого в размерности $n-2$ имеются ненулевые гомологии, поэтому \mathcal{K}_P не Коэн-Маколеев. \triangleleft

Далее докажем, что из Коэн-Маколеевости нерв-комплекса \mathcal{K}_P следует явное описание кольца \mathbb{Z}_2 -когомологий малых накрытий над P .

Следующая лемма пригодится при использовании дга-модели.

Лемма 4.3 Пусть P прямоугольный многогранник конечного объёма в \mathbb{L}^n .

1) Все вершины P лежат на абсолюте $\partial\mathbb{L}^n$. Тогда

$$Tor_{H^*(B\mathbb{Z}_2^{n-1})}^{-i}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = 0 \quad \forall i > 0$$

2) На абсолюте $\partial\mathbb{L}^n$ лежит только одна вершина. Тогда

$$Tor_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}^{-i}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = 0 \quad \forall i > 0$$

\triangleright

Далее $k = n-1$ (в пункте 1) или $k = n$ (в пункте 2). Будем доказывать оба пункта одновременно.

Проективной размерностью $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]$ как модуля над кольцом $H^*(B\mathbb{Z}_2^k)$ будем называть число

$$pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = \max\{i : Tor_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)}^{-i}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) \neq 0\}$$

Используем формулу Ауслендера-Буксбаума:

$$pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] + depth \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = depth H^*(B\mathbb{Z}_2^k)$$

$depth$ совпадают с размерностями Крулля, которые в силу Коэн-Маколеевости равны одновременно $n-1$ (в пункте 1)) или n (в пункте 2)), поэтому получаем $pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = 0$, откуда $Tor_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)}^{-i} \neq 0$ только для $i = 0$. \triangleleft

Так как гиперболические многообразия над прямоугольными многогранниками $N(P, \Lambda)$ гомотопически эквивалентны частичным факторам вещественных момент-угол пространств (см раздел 2), задача сводится к изучению колец когомологий частичных факторов.

Опишем дга-модель Франца для когомологий частичных факторов [5]. Нас будет интересовать частный случай: когомологии с коэффициентами в \mathbb{Z}_2 , хотя модель допускает обобщение на произвольное коммутативное кольцо коэффициентов.

На $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ действует группа $G = \mathbb{Z}_2^m$, где m число вершин в комплексе \mathcal{K} .

Пусть $K \subset G$ подгруппа, которая действует свободно на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$. Факторпространство по этому действию называется вещественным торическим пространством.

Фиксируем изоморфизм $L = G/K \cong \mathbb{Z}_2^n$. Факторотображение $\Lambda : G \rightarrow L$ можно интерпретировать $n \times m$ матрицей $\Lambda = (\lambda_{ij})$, где $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}_2$.

На L определены n координатных функций $s_1, \dots, s_n : L \rightarrow \mathbb{Z}_2$, которые порождают \mathbb{Z}_2 -алгебру $\mathcal{F}(L)$ всех функций $L \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Введём структуру дифференциальной биградуированной алгебры на произведении:

$$A(\mathcal{K}, L) = \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}] \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{F}(L)$$

$\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}]$ и $\mathcal{F}(L)$ являются подалгебрами, на перемножение элементов этих алгебр накладываются дополнительные соотношения:

$$s_i t_j = t_j s_i + \lambda_{ij} t_j$$

Дифференциал на $A(\mathcal{K}, L)$ определяется следующим образом

$$ds_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} t_j$$

$$dt_i = 0$$

Биградуировка определяется так $bideg(s_i) = (-1, 0)$, $bideg(t_j) = (0, 1)$. Группа L действует на $A(\mathcal{K}, L)$ через действие на функциях $L \rightarrow \mathbb{Z}_2$.

Как доказано в работе [5], построенная дифференциальная градуированная алгебра является дга-моделью для когомологий вещественных торических пространств.

Утверждение 4.4 *Дифференциальная градуированная алгебра $A(\mathcal{K}, L)$ квазиизоморфна алгебре сингулярных коцепей $C^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/K; \mathbb{Z}_2)$. Квазиизоморфизм L -эquivариантен и естественен относительно включения подкомплексов \mathcal{K} . В частности,*

$$H^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/K; \mathbb{Z}_2) = H^*(A(\mathcal{K}; L))$$

Будем считать, что P идеальный прямоугольный многогранник размерности n (в случае одной идеальной вершины дальнейшая работа с дга моделью аналогичная) с характеристической матрицей Λ . Из Утверждения 2.15 известно, что $N(P, \Lambda) \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/\text{Ker} \Lambda$. Поэтому для вычисления когомологий можно воспользоваться дга-моделью, описанной выше.

Явно посчитаем коцепи и кограницы. Так как $\text{Tor}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^{n-1})}^{-i}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = 0 \ \forall \ i > 0$, не будем рассматривать коцепи, содержащие s_i .

Рассмотрим коцепной комплекс

$$C^n \xleftarrow{\partial_{n-1}} C^{n-1} \xleftarrow{\partial_{n-2}} \dots \xleftarrow{\partial_3} C^3 \xleftarrow{\partial_2} C^2 \xleftarrow{\partial_1} C^1 \xleftarrow{\partial_0} C^0$$

$$H^0(C^*) = \text{Ker} \partial_0 = \mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_0$$

$$H^1(C^*) = \text{Ker} \partial_1 / \text{Im} \partial_0 = \mathbb{Z}_2 \langle t_1, \dots, t_m \rangle / \mathbb{Z}_2 \langle \partial_0 s_1, \partial_0 s_2, \dots, \partial_0 s_{n-1} \rangle$$

$$H^2(C^*) = \text{Ker} \partial_2 / \text{Im} \partial_1 = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_2 / \mathbb{Z}_2 \langle t_i ds_j \rangle =$$

$$H^3(C^*) = \text{Ker} \partial_3 / \text{Im} \partial_2 = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_3 / \mathbb{Z}_2 \langle t_i t_j ds_k \rangle$$

Далее аналогично проверяется, что все когомологии до размерности $n-1$ включительно имеют вид

$$H^k(C^*) = \text{Ker} \partial_i / \text{Im} \partial_{i-1} = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_i / \mathbb{Z}_2 \langle t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_{k-1}} ds_j \rangle$$

$\text{Ker} \partial_i = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_i$ всегда выполнено, так как в 0 переходят те элементы, где нет s_i , а в C^* уже учтены соотношения на t_i .

Образы дифференциалов такие потому, что являются образами $t_{i_1} \dots t_{i_k} s_i$. Если в произведении будет не один элемент вида s_j , то в образе будет s_j в чистом виде, но у нас все коцепи, где содержатся s_j не рассматриваются в силу того, что $\text{Tor}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^{n-1})}^{-i}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = 0 \ \forall i > 0$

Суммируем все вычисления в следующую теорему. Обозначим $\lambda_i = \partial_0 s_i$

Теорема 4.5 Пусть P прямоугольный n -многогранник конечного объема
1) Все вершины P лежат на абсолюте. Тогда

$$H^*(N(P, \Lambda); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] / (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$$

2) Пусть P некомпактный с одной вершиной на абсолюте. Тогда

$$H^*(N(P, \Lambda); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] / (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Теперь рассмотрим такие многогранники P , которые имеют более одной вершины на абсолюте, но при этом имеется некоторое количество вершин, которые на абсолюте не лежат. В таком случае нерв-комплекс \mathcal{K}_P никогда не Коэн-Маколеев, поэтому описания кольца когомологий, аналогичного Теореме 4.5, нет.

Кольцо когомологий $N(P, \Lambda)$ аддитивно устроено как тор-алгебра:

$$H^*(N(P, \Lambda); \mathbb{Z}_2) = \text{Tor}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2)$$

Оказывается, что в нашем случае только Tor^0 и Tor^{-1} нетривиальны.

Теорема 4.6 Пусть $P \subset \mathbb{L}^n$ прямоугольный многогранник конечного объёма. Пусть P имеет более 1 вершины, лежащей на абсолюте $\partial \mathbb{L}^n$. При этом имеется хотя бы 1 вершина, которая на абсолюте не лежит. Тогда

$$\text{Tor}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}^{-i}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = 0 \ \forall i > 1$$

▷

Воспользуемся следствием 5.3 из [23]:

$$\text{depth} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = \min_i \{ \tilde{H}_{i-\dim F-2}(lk F, \mathbb{Z}_2) \neq 0, \exists F \in \mathcal{K}_P \}$$

\mathcal{K}_P представляет собой сферу S^{n-1} , из которой вырезали диски D^{n-1} (каждый удалённый диск соответствует идеальной вершине в P). То есть, гомотопически \mathcal{K}_P является букетом сфер S^{n-2} .

Пусть $i = n - 1, F = \emptyset$. Тогда $\tilde{H}_{n-2}(lk(\emptyset), \mathbb{Z}_2) = \tilde{H}_{n-2}(\mathcal{K}_P, \mathbb{Z}_2) \neq 0$. Отсюда следует, что $depth \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] \leq n - 1$.

Докажем, что неравенство выше на самом деле является равенством. Пусть $i < n - 1$. Тогда $i - dim F - 2 < n - dim F - 3$.

Линки симплексов, которые расположены не на границе дырок в \mathcal{K}_P , топологически такие же, как линки симплексов на триангулированной сфере S^{n-2} , то есть $lk F = S^{n-3-dim F}$. Линки симплексов, которые лежат на границе дырок, стягиваемы. То есть, приведённые гомологии линков отличны от нуля только в размерности $n - 3 - dim F$, что больше, чем $i - dim F - 2$.

То есть, для любых $i < n - 1$, для любых $F \in \mathcal{K}_P$: $\tilde{H}_{i-dim F-2}(lk F, \mathbb{Z}_2) = 0$. А значит $depth \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = n - 1$.

Используем формулу Ауслендера-Буксбаума:

$$pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] + depth \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = depth H^*(B\mathbb{Z}_2^n)$$

Из формулы выше следует, что $pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = 1$

◁

Замечание 4.7 В случае теоремы 4.6 и Tor^0 , и Tor^{-1} всегда нетривиальны, усилить теорему нельзя ни для какого многогранника P .

Tor^0 явно описывается образующими и соотношениями аналогично теореме 4.5 и поэтому нетривиален для любого P .

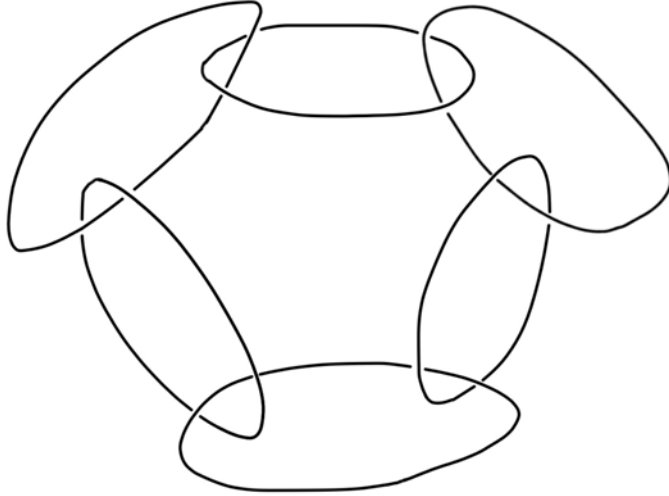
Tor^{-1} не может быть тривиальным потому, что, как следует из работы Дэвиса-Янушкевича [2], \mathbb{Z}_2 -когомологии $N(P, \Lambda)$ описываются только через Tor^0 тогда и только тогда, когда нерв-комплекс \mathcal{K}_P Коэн-Маколеев. А свойство Коэн-Маколеевости нерв-комплекса для P из теоремы 4.6 не выполняется никогда.

5 Некомпактные гиперболические 3-многообразия как дополнения до зацеплений

Известен следующий классический результат Тёрстона [24] про склейку 4 прямоугольных идеальных антипризм по шахматной раскраске.

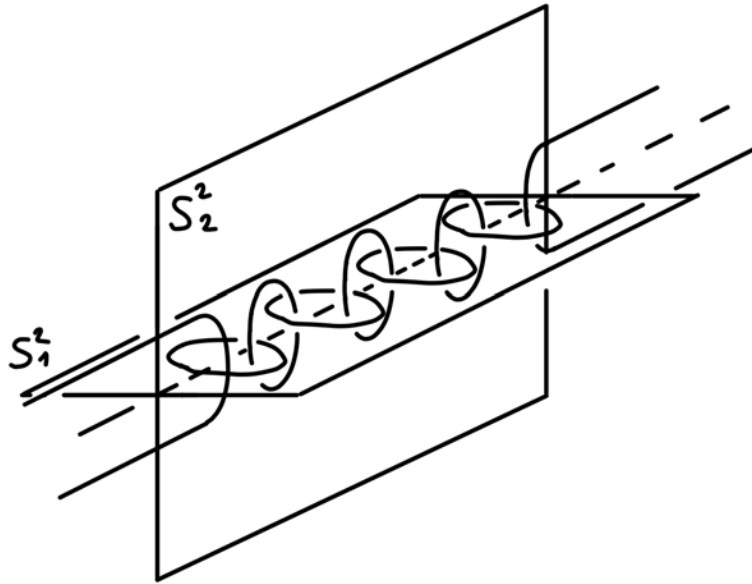
Теорема 5.1 Пусть $P = A_n$. Тогда $N(P)$ гомеоморфно $S^3 \setminus C_{2n}$, где C_{2n} цепное зацепление, состоящее из $2n$ компонент.

На рисунке ниже приведено 6-компонентное зацепление C_6 . Согласно Теореме 5.1, при взятии дополнения до такого зацепления в S^3 мы получаем многообразие, которое можно разбить на 4 копии идеальных прямоугольных октаэдров.

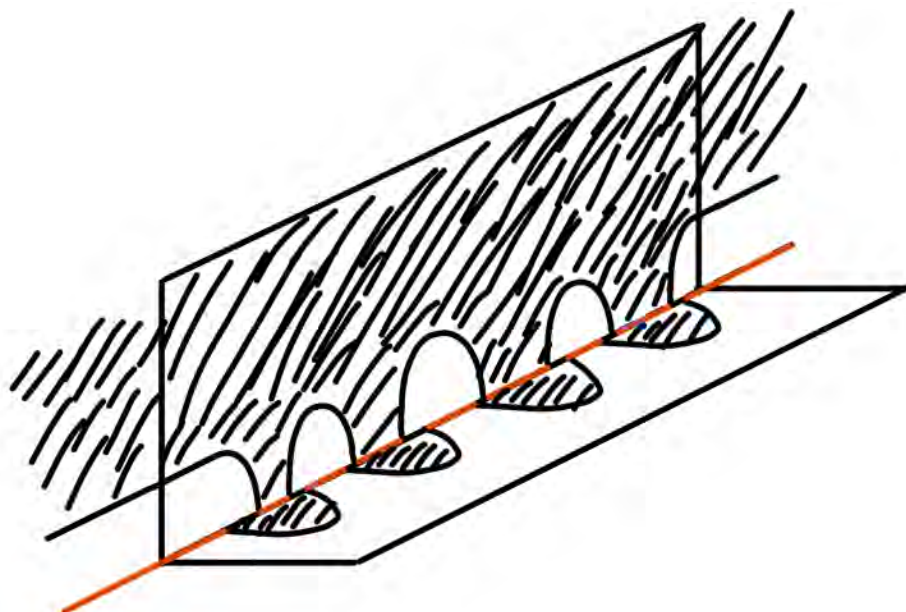


▷

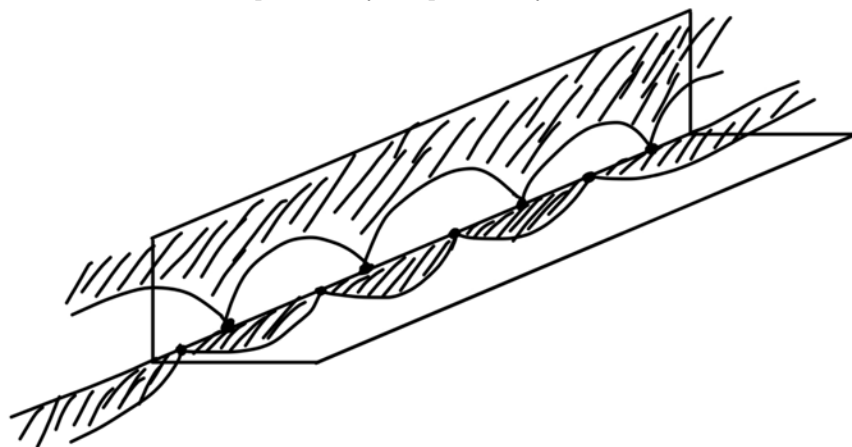
Будем рассматривать сферу S^3 в стереографической проекции. Рассмотрим двумерные ортогональные сферы $S_1^2, S_2^2 \hookrightarrow S^3$. Они разбивают S^3 на четыре диска D^3 . Пересечением S_1^2 и S_2^2 является S^1 . Расположим окружности (8 штук) на S^1 как на рисунке ниже.



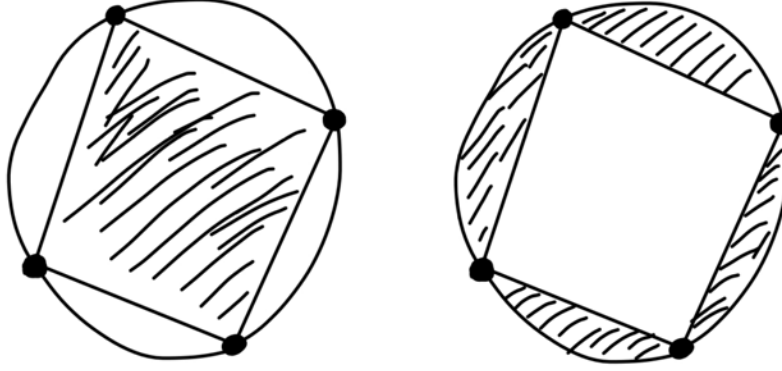
Рассмотрим один из четырёх дисков D^3 . Будем считать, что S_2^2 покрашена в чёрный цвет, а S_1^2 покрашена в белый. На картинке это будет выглядеть так



После стягивания красных дуг картинка будет такой



Так как полуплоскость в стереографической проекции является замкнутым диском D^2 , получаем следующее разбиение на двух дисках D^2



Итого мы получили разбиение границы одного из дисков $\partial D^3 = S^2$ на чёрные и белые грани. Другие 3 шара будут иметь аналогичные разбиения и шахматную раскраску в два цвета. Получили, что наше многообразие $S^3 \setminus C_8$ разбито на 4 копии антипризмы A_4 , в каждой из которых есть вершины, но удалены рёбра (поскольку вложенные 8 окружностей мы выбрасываем из сферы S^3).

После стягивания красных дуг выше мы получили 8 точек на окружности и выброшенные интервалы. Точки гомотопией можно вытянуть в отрезки и получить 8 проколов на окружности, которые будут соответствовать идеальным вершинам A_4 .

Итого мы доказали теорему для антипризмы A_4 и зацепления C_8 . Для всех остальных антипризм A_n и зацеплений C_{2n} доказательство абсолютно аналогичное. \triangleleft

6 Некоторые наблюдения и гипотезы

Как уже было сказано ранее, многообразия вида $N(P, \Lambda)$ деформационно ретрагируются на кубический комплекс C , который двойственен к разбиению $N(P, \Lambda)$ на копии многогранника P .

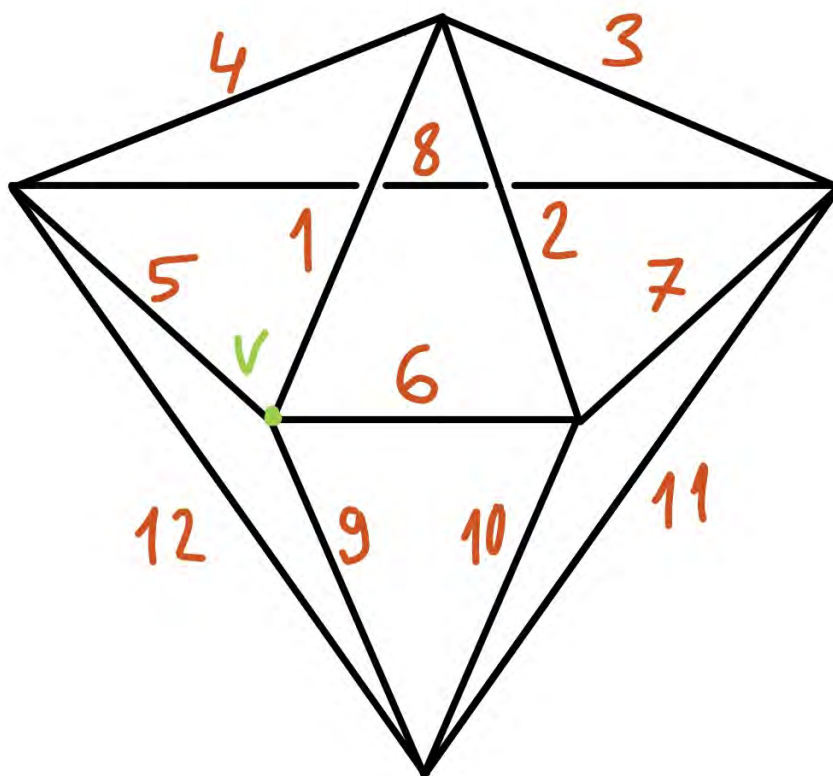
Опишем этот комплекс в простейшем случае, когда Λ соответствует шахматной раскраске идеального 3-многогранника P .

Утверждение 6.1 Пусть P прямоугольный идеальный 3-многогранник. Тогда кубический комплекс $C \simeq N(P)$ состоит из склеенных между собой двумерных торов. Количество торов в точности совпадает с количеством вершин многогранника P .

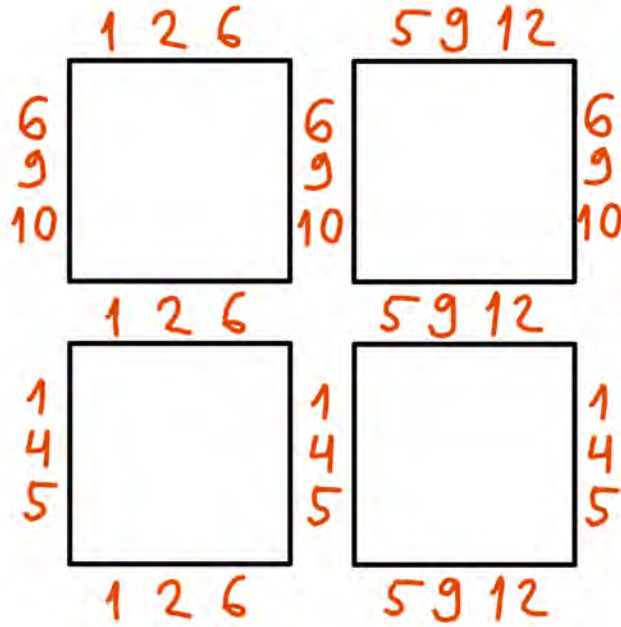
\triangleright

Доказательство проведём на примере идеального октаэдра, а для всех остальных многогранников будет очевидно, что оно такое же. Для удобства

пронумеруем все рёбра октаэдра.



Рассмотрим, например, вершину v . Из неё выходят рёбра с номерами 1, 5, 6, 9. Каждому ребру в комплексе C соответствует квадрат. Нарисуем ниже все квадраты, которые есть рядом с вершиной v (см рисунок ниже). Три цифры рядом с каждым ребром соответствуют номерам рёбер октаэдра. Такое обозначение естественно потому, что рёбра кубического комплекса в точности соответствуют граням многогранника, а грани однозначно кодируются номерами рёбер.



Из картинki видно, что эти 4 квадрата около вершины v склеиваются в двумерный тор. И около любой вершины будут такие торы.

То есть, мы доказали, что кубический комплекс C состоит из двумерных торов. Про них можно сказать несколько больше: два тора склеиваются тогда и только тогда, когда они соответствуют соседним вершинам v_1 и v_2 , потому что в этом случае один и тот же квадрат (соответствующий ребру, соединяющему вершины v_1 и v_2), входит в каждый из двух торов. Больше общих квадратов иметься не будет, поэтому соседние торы склеиваются по 1 квадрату, то есть $\frac{1}{4}$ части поверхности торов.

Доказательство для произвольного прямоугольного идеального 3-многогранника абсолютно такое же потому, что из всех идеальных вершин выходит ровно 4 ребра. То есть, каждой вершине будет соответствовать тор \triangleleft

Замечание 6.2 4 квадрата с картинki склеиваются именно в тор потому, что из того, что раскраска многогранника P шахматная, следует, что многообразие $N(P)$ ориентируемо.

Из утверждения выше следует, что в случае, если $P = A_n$, то соответствующее многообразие $N(P)$ гомотопически эквивалентно $2n$ двумерным торам, которые склеены между собой (по $\frac{1}{4}$ частям поверхностей). И в то же время, $N(P)$ гомеоморфно $S^3 \setminus C_{2n}$ (Теорема 5.1). Из такого описания, как в утверждении выше, разумно выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 6.3 Пусть P идеальный прямоугольный 3-многогранник. Тогда многообразие $N(P)$ гомеоморфно $S^3 \setminus L$, где L зацепление, обладающее следующими свойствами:

1) Количество окружностей в L в точности совпадает с количеством вершин многогранника P .

2) Существует $n \geq 3$ такое, что среди окружностей в L есть $2n$ окружностей, которые зацеплены друг с другом так же, как и в цепном $2n$ компонентном зацеплении C_{2n} .

Из Теоремы 3.3, Примера 3.1 и Примера 3.4 следует, что достаточно много многообразий из множества

$$N = \{N(P), \text{ где } P \text{ идеальный прямоугольный трёхмерный многогранник}\}$$

расслаиваются над окружностью.

Стоит заметить, что, во-первых, не удалось проверить (в разделе 3) достаточное условие для всех идеальных прямоугольных многогранников P , а, во-вторых, для тех P , на которых удалось построить подходящие состояния, линки всегда получались стягиваемыми. Это значит, что построенные состояния получились 1-правильными, что излишне для применения теоремы Столлинга: группа H (из раздела 2) будет получаться конечно представленной, а для теоремы Столлинга достаточно, чтобы группа была конечнопорождённой.

Помимо соображений выше, если Гипотеза 6.3 верна, то многообразия $N(P)$, где P идеальный прямоугольный 3-многогранник, устроены похожим образом для любого P . То есть, разумно выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 6.4 Пусть P прямоугольный идеальный 3-многогранник. Тогда существует расслоение:

$$\Sigma^2 \rightarrow N(P) \rightarrow S^1$$

, где Σ^2 двумерная сфера с k проколами, где k в точности совпадает с количеством вершин многогранника P .

Список литературы

- [1]Giovanni Italiano, Bruno Martelli, Matteo Migrioli *Hyperbolic manifolds that fibre algebraically up to dimension 8*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 23(2): 1-38;
- [2]M.W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., 62:2 (1991), 417–451.
- [3]Anton Aizenberg and Victor Buchstaber, *Nerve complexes and moment-angle spaces of convex polytopes*. Trudy Mat. Inst. Steklova 275 (2011), 22–54
- [4]Daniel Dugger, *A primer on homotopy colimits*. University of Oregon (2008)
- [5]Li Cai, *On products in a real moment-angle manifold* (2015).
<https://arxiv.org/pdf/1410.5543.pdf>
- [6]Matthias Franz, *Dga models for moment-angle-complexes* (2022).
<https://arxiv.org/pdf/2006.01571.pdf>
- [7]В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак, *Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками* (2017). Успехи мат. наук, т. 72, вып. 2 (434)

- [8] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology*. Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [9] Э.Б. Винберг, *Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности*, Тр. ММО, 47, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 68–102;
- [10] Suyoung Choi, Shizuo Kaji, and Stephen Theriault, *Homotopy decomposition of a suspended real toric space*, Bol. Soc. Mat. Mex. (3) 23 (2017), no. 1, 153–161. MR 3633130
- [11] S. Choi, H. Park, *Multiplicative structure of the cohomology ring of real toric spaces*, Homology Homotopy Appl. 22 (2020), 97–115;
- [12] M. Franz *The cohomology rings of real toric spaces and smooth real toric varieties*, <https://arxiv.org/pdf/2008.08961.pdf> (2021)
- [13] G. Reisner *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings*, Adv. Math. 14 (1976), 30–49.
- [14] Panov T.E., Ray N. *Categorical aspects of toric topology*, Providence, RI: Amer. Math. Soc. (2008) P. 293–322. (Contemp. Math.; V. 460).
- [15] Leonid Potyagailo, Ernest Vinberg *On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces*, Comment. Math. Helv. 80 (2005), 63–73
- [16] Victor M. Buchstaber, Nikolai Yu. Erokhovets *Combinatorics and toric topology of fullerenes and related families of polytopes*
- [17] А.Ю.Веснин, *Трёхмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля*, Сиб. матем. журн., 28:5 (1987), 50–53.
- [18] Giovanni Italiano, Bruno Martelli, and Matteo Migliorini *Hyperbolic 5-manifolds that fiber over S^1* (2021), arXiv: 2010.10200
- [19] Mladen Bestvina and Noel Brady *Morse theory and finiteness properties of groups*, Invent. Math., 129(3):445–470, 1997.
- [20] L. Battista, B. Martelli *Hyperbolic 4-manifolds with perfect circle-valued Morse functions*, arXiv:2009.04997.
- [21] Martin R. Bridson, Dawid Kielak, and Monika Kudłinska *Stalling’s fibering theorem and PD^3 -pairs* (2023), arXiv:2307.10725v1
- [22] J. Stallings, *On fibering certain 3-manifolds* (1962); Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ of Georgia Institute, 1961), 95–100.
- [23] Welker, V. *Which Properties of Stanley–Reisner Rings and Simplicial Complexes are Topological?*. Peeva, I. (eds) Commutative Algebra. Springer, Cham
- [24] William P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*