Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Гиперболические многообразия над прямоугольными многогранниками конечного объёма

Цыганков Дмитрий Александрович
503 группа

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

2024

Содержание

1 Введение

Работа посвящена изучению колец когомологий гиперболических многообразий над прямоугольными многограниками конечного объёма, которые лежат в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^n$, где $n < 13$ [11]. Примеры таких многогранников известны в размерностях $n \leq 8$, полная классификация имеется лишь при $n = 3$.

Пусть $P \subset \mathbb{L}^n$ прямоугольный многогранник конечного объёма. Во всей работе по умолчанию предполагается, что P не компактный, если не указано противное. Группой Коксетера многогранника P называется группа, порождённая отражениями относительно гиперплоскостей, которые содержат гиперграни многогранника P. Такая группа задаётся образующими и соотношениями следующим образом:

$$G(P) = \left\langle g_1, \ldots, g_m \mid g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i,\ \text{если } F_i, F_j \text{ соседние гиперграни} \right\rangle$$

Группа $G(P)$ действует отражениями на пространстве $\mathbb{L}^n$. Факторпространством является исходный многогранник P.

Имеется конструкция Веснина из [1], позволяющая найти подгруппу индекса 2^k в $G(P)$, которая действует свободно на $\mathbb{L}^n$. Пусть имеется эпиморфизм $\phi^{(k)} : G(P) \to \mathbb{Z}_2^k$ такой, что образы отражений $g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}$ в любых r гипергранях $F_{i_1}, \ldots, F_{i_r}$, имеющих непустое пересечение, линейно независимы в $\mathbb{Z}_2^k$. Тогда $Ker\phi^{(k)}$ действует свободно на $\mathbb{L}^n$ и является подгруппой индекса 2^k в группе $G(P)$.

Эпиморфизм $\phi^{(k)}$ допускает разложение в композицию по универсальному свойству гомоморфизма абеленизации:

$$G(P) \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$$

Многообразие $\mathbb{L}^n / Ker\phi^{(k)}$ однозначно строится по многограннику P и $\mathbb{Z}_2$−матрице Λ, поэтому удобно ввести обозначение $N(P, \Lambda) = \mathbb{L}^n / Ker\phi^{(k)}$.

Многообразия $N(P,\Lambda)$ гомотопически эквивалентны частичным факторам вещественных момент-угол пространств:

$$N(P,\Lambda) \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/Ker\Lambda$$

Используя дга-модель Франца для когомологий вещественных торических пространств из [5], можно получить аддитивное описание когомологий:

$$H^*(N(P,\Lambda);\mathbb{Z}_2) = Tor_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P],\mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i,j} Tor^{-i,j}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P],\mathbb{Z}_2)$$

В случае, если $\mathcal{K}_P$ Коэн-Маколеев, в тор-алгебре остается только нулевая внешняя градуировка, которую можно описать в явном виде (Теорема 3.1)

$\mathcal{K}_P$ Коэн-Маколеев тогда и только тогда, когда P имеет не более одной вершины, лежащей на абсолюте, либо когда все вершины лежат на абсолюте (Утверждение 3.1).

В работе доказывается, что в общем случае (при отсутствии свойства Коэн-Маколеевости) в тор-алгебре остаются нетривиальными только нулевая и первая внешние градуировки (Теорема 3.2)

Для многообразий имеется задача о когомологической жёсткости. Семейство многообразий Σ называется когомологически жёстким, если для любых двух многообразий $M, M' \in \Sigma$ верно следующее: если $H^*(M) \cong H^*(M')$, то M и M' диффеоморфны.

В связи с этой задачей явное вычисление когомологий многообразий $N(P,\Lambda)$ представляет дополнительный интерес, потому что малые накрытия над многогранниками Погорелова когомологически жёсткое семейство, что доказано в работе [6].

2 Предварительные сведения

2.1 Малые накрытия и вещественные момент-угол многообразия

Изначально малые накрытия были определены в [2], там же изучены их кольца когомологий. Дга-модели для когомологий вещественных момент-угол комплексов построены в [4], [5].

Определения и свойства в данном разделе изложены по работе [6].

Определение 2.1 *Малым накрытием над простым n-мерным многогранником называется n-мерное многообразие N такое, что:*

1)Имеется локально стандартное действие дискретного тора $\mathbb{Z}_2^n$ на N. То есть, каждая точка $x \in N$ содержится в $\mathbb{Z}_2^n$-инвариантной окрестности, которая $\mathbb{Z}_2^n$-эквивариантно гомеоморфна открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$, а в $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{Z}_2^n$ действует отражениями относительно координатных плоскостей

2)Имеется проекция $\pi : N \longrightarrow P$, слоями которой являются орбиты $\mathbb{Z}_2^n$ действия

Имеется и конструктивное определение малых накрытий.

Определение 2.2 *Пусть P n-мерный многогранник с m гипергранями $F_1, ..., F_m$. Пусть Λ - матрица размера $n \times m$ с элементами из $\mathbb{Z}_2$, столбцы $\lambda_i = (\lambda_{1i}, ..., \lambda_{ni})$ обладают следующим свойством:*

$$det(\lambda_{i_i}, ..., \lambda_{i_n}) = \pm 1, F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_n} \neq \varnothing$$

Тогда пара (P, Λ) называется характеристической

По каждой характеристической матрице можно построить малое накрытие

$$N(P, \Lambda) = P \times \mathbb{Z}_2^n / \sim$$

где $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2, \quad t_1 \cdot t_2^{-1} \in T(x_1)$. $T(x) = \prod\limits_{i: x \in F_i} T_i$, где T_i одномерный подтор в $\mathbb{Z}_2^n$, порождённый вектором λ_i. Получается, что многообразие $N(P, \Lambda)$ представляет собой склейку вдоль граней 2^n экземпляров многогранника P.

Верно и обратное: по каждому малому накрытию можно построить характеристическую матрицу такую, что из неё и многогранника можно будет построить малое накрытие.

Однако если многогранник имеет размерность больше 3, то не всегда можно построить характеристическую матрицу, а значит не над каждым простым многогранником есть малое накрытие. Примеры есть в [2].

По n-мерному многограннику P можно построить ещё один объект: вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P$. Теперь многогранник предполагается произвольным простым, ограничений в виде отсутствия характеристической матрицы нет.

Определение 2.3 *Многообразие $\mathcal{R}_P$ определяется из следующей коммутативной диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_P \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mu"] \\
P \arrow[r, "i_P"] & \mathbb{R}^m_{\geq}
\end{tikzcd}$$

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | < \mathbf{a}_i, \mathbf{x} > + b_i \geq 0; \ \ i = 1, ..., m \right\}$$

i_P - вложение многогранника в положительный ортант

$$i_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto (< \mathbf{a_1}, \mathbf{x} > + b_1, \ldots, < \mathbf{a_m}, \mathbf{x} > + b_m)$$

$$\mu : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m_{\geq}, \quad (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1^2, \ldots, x_m^2)$$

Получено n-мерное многообразие $\mathcal{R}_P = \mu^{-1}(i_P(P))$, которое задано как пересечение $m - n$ квадрик в $\mathbb{R}^m$.

Если имеется характеристическая матрица Λ для многогранника P, то можно задать $\mathbb{Z}_2$-линейное отображение $\Lambda : \mathbb{Z}_2^m \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$. Тогда $Ker\Lambda$ является $(m-n)-$мерным дискретным тором, который свободно действует на $\mathcal{R}_P$. Если профакторизовать по этому действию, получится малое накрытие, происходящее из характеристической пары (P, Λ):

$$\mathcal{R}_P / Ker\Lambda \cong N(P, \Lambda)$$

Пусть $\mathcal{K}$ произвольный симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, \dots, m\}$. Имеется следующее обобщение вещественных момент-угол многообразий.

Определение 2.4 *Момент-угол комплексом над симплициальным комплексом $\mathcal{K}$ называется пространство вида $\mathcal{R}_\mathcal{K} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (D^1)^\sigma \times (S^0)^{[m] \setminus \sigma}$, где $S^0 = \{\pm\}$ граница отрезка $D^1 = [-1, 1]$.*

В случае если $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ для некоторого простого P, существует гомеоморфизм $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P} \cong \mathcal{R}_P$.

2.2 Построение группы $Ker\phi^{(k)}$ и гиперболических многообразий над прямоугольными многогранниками

Первый пример замкнутого 3-многообразия с гиперболической структурой был построен Лёбеллем в 1931г., тогда это была известная открытая проблема. В работе [1] была построена целая серия таких многообразий.

Пусть P прямоугольный многогранник конечного объёма в $\mathbb{L}^n$. За m обозначим число гиперграней P. Тогда прямоугольнаы группа Коксетера $G(P)$ задана образующими и соотношениями:

$$G(P) = \left\langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i,\ \text{если } F_i, F_j \text{ соседние гиперграни} \right\rangle$$

Группа $G(P)$ действует на $\mathbb{L}^n$ отражениями относительно гиперплоскостей, которые содержат гиперграни P. У такого действия имеются нетривиальные стабилизаторы в гранях P, поэтому действие не свободно. На самом деле, $\mathbb{L}^n / G(P)$ представляет собой исходный многогранник.

Лемма 2.1 *Пусть имеется эпиморфизм $\phi^{(k)} : G(P) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^k$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1)Подгруппа $Ker\phi^{(k)} \subset G(P)$ не содержит элементов конечного порядка.
2)Образы отражений $g_{i_1}, \dots, g_{i_r}$ в любых r гранях $F_{i_1}, \dots, F_{i_r}$, имеющих непустое пересечение, линейно независимы в $\mathbb{Z}_2^k$.
3)Группа $Ker\phi^{(k)}$ действует свободно на $\mathbb{L}^n$.

В работе [1] лемма была сформулирована и доказана в более частном случае: компактные прямоугольные 3-многогранники, однако она легко обобщается на прямоугольные многогранники конечного объёма.

Определение 2.5 *Гиперболическим многообразием над многогранником P будем называть многообразие $\mathbb{L}^n / Ker\phi^{(k)}$*

Эпиморфизм $\phi^{(k)}$ допускает разложение в композицию по универсальному свойству гомоморфизма абеленизации:

$$G(P) \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$$

Λ - линейное отображение $\mathbb{Z}_2$-пространств. Его можно интерпретировать как матрицу с элементами из $\mathbb{Z}_2$, на которую накладываются те же условия, что и на характеристическую матрицу малого накрытия над многогранником P.

В случае компактного P многообразие $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n)}$ становится малым накрытием $N(P,\Lambda)$, если многогранник P допускает характеристическую матрицу.

Обозначение 2.1 *По аналогии с компактным случаем, введём обозначение* $N(P,\Lambda) = \mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n)}$ *или* $N(P,\Lambda) = \mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n-1)}$*, второе только если все вершины* P *лежат на абсолюте.*

Если же $k = m$, то $Ker\phi^{(m)} = G'(P)$. В случае компактного P снова известно, что это за пространство: $\mathbb{L}^n/G'(P) \cong \mathcal{R}_{\mathcal{P}}$

В общем случае получается, что $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$ имеет гомотопический тип пространства Эйленберга-Маклейна $K(Ker\phi^{(k)}, 1)$. Это следует из того, что $\mathbb{L}^n$ - стягиваемое универсальное накрытие.

Это ещё одна мотивация к изучению когомологий многообразий типа Лёбелля, ведь это даёт когомологии групп $Ker\phi^{(k)}$.

Ниже приведено полное описание гомотопического типа пространств $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$. Предполагается, что k таково, что существует эпиморфизм $\phi^{(k)} : G(P) \to \mathbb{Z}_2^k$ такой, что $Ker\phi^{(k)}$ свободно действовует на $\mathbb{L}^n$.

P предполагается прямоугольным многогранником конечного объёма в $\mathbb{L}^n$.

Утверждение 2.1 $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)} \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/Ker\Lambda$*, где* Λ *получается из разложения* $\phi^{(k)} : G(P) \xrightarrow{Ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$

2.3 Коэн-Маколеевость симплициальных комплексов

Коэн-Маколеевость алгебры это гомологическое свойство, которое появилось задолго до возникновения торической топологии. Оно представляет самостоятельный интерес, поскольку такие алгебры допускают существование регулярной последовательности.

В случае колец когомологий гиперболических многообразий над прямоугольными многогранниками конечного объёма (см. раздел 3) эта регулярная последовательность будет порождать идеал в кольце когомологий.

В определениях далее предполагается, что A является $\mathbb{N}-$градуированной алгеброй над полем $\mathbb{K}$ или над $\mathbb{Z}$. Размерность Крулля A равняется n.

Определение 2.6 *Последовательность* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *однородных элементов из* A *называется однородной системой параметров, если размерность Крулля* $A/(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *равна нулю.*

Определение 2.7 *Однородная система параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ алгебры R называется регулярной последовательностью, если λ_{i+1} не является делителем нуля в $A/(\lambda_1, \ldots, \lambda_i)$.*

Имеется следующее эквивалентное определение регулярной последовательности.

Определение 2.8 *Последовательность алгебраически независимых элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$ называется регулярной последовательностью, если R является конечномерным свободным $\mathbb{K}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]-$модулем.*

Определение 2.9 *Симплициальный комплекс на множестве $[m]$ называется Коэн-Маколеевым над $\mathbb{K}$, если $\mathbb{K}[\mathcal{K}]$ удовлетворяет свойству Коэн-Маколеевости.*

Имеется удобный критерий Коэн-Маколеевости, доказанный Рейснером в [10].

Утверждение 2.2 *Кольцо $\mathbb{K}[\mathcal{K}]$ Коэн-Маколеево над $\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда для любого симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ выполнено $\widetilde{H}_i(link(\sigma); \mathbb{K}) \cong 0$, где $i < dim(link(\sigma))$*

3 Основные результаты

3.1 Кольца когомологий гиперболических многообразий над прямоугольными многогранниками

Дэвис и Янушкевич в [2] считали когомологии малых накрытий и квазиторических многообразий над простым многогранником P из соображений вырождения во втором листе спектральной последовательности Лере-Серра расслоения

$$N(P, \Lambda) \longrightarrow E\mathbb{Z}_2^n \times_{\mathbb{Z}_2^n} N(P, \Lambda) \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^n$$

Можно проверить, что доказательство Дэвиса и Янушкевича работает и для гиперболических многообразий над некомпактными прямоугольными многогранниками конечного объёма (в случае Коэн-Маколеевого нерв-комплекса $\mathcal{K}_P$), но ниже будет приведено более простое доказательство с использованием дга-модели Франца.

Всюду в этом разделе будем предполагать, что $n = dimP$.

Следующая лемма доказана в статье [3, Утверждение 4.3] в случае произвольного выпуклого многогранника P. Мы опустим некоторые комбинаторные результаты леммы, так как для доказательства Коэн-Маколеевости нам интересен только гомотопический тип линков. Ниже приведено обобщение, доказанное аналогично [3]. Предполагается, что теперь в многограннике некоторые вершины могут отсутствовать. Например, такие многогранники возникают в пространстве Лобачевского, где часть вершин может лежать на абсолюте.

Пусть имеется следующее отображение

$$\sigma : CatP \longrightarrow \mathcal{K}_P, \sigma(F) = \{i | F \subseteq F_i\}$$

Ниже предполагается, что $dimF \neq 0$, так как иначе $link(\sigma(F)) = \varnothing$.

Лемма 3.1 *Пусть F грань многогранника P. Рассмотрим симплекс $\sigma(F)$ и его линк $L_{\sigma(F)} = link(\sigma(F))$ в симплициальном комплексе $\mathcal{K}_P$. Тогда $L_{\sigma(F)}$ гомотопически эквивалентен сфере $S^{dimF-1} \setminus \{r\ pt\}$ без некоторого числа точек r, которое совпадает с числом удалённых вершин у грани F.*

$\triangleright$

Обозначим за $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ множество гиперграней многогранника P. Как и ранее предполагается, что лишних гиперграней в $\mathcal{F}$ нет.

Имеем $F = \cap_{i \in \sigma(F)} F_i$ и $F \not\subseteq F_j$, если $j \notin \sigma(F)$ - по определению функции σ. Граница ∂F покрыта множествами $G_j = F_j \cap F = F_j \cap (\cap_{i \in \sigma(F)} F_i)$, так как каждая точка границы ∂F содержится в некоторой гиперграни, не содержащей F. Множества G_j не покрывают саму грань F, так как ни одно из них не содержит F. Мы утверждаем, что нерв покрытия $\{G_j\}$ совпадает с комплексом $L_{\sigma(F)}$. Имеется ряд следующих эквивалентных утверждений:

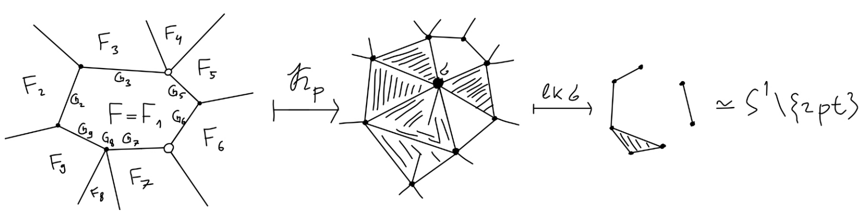
$$G_{j_1} \cap \cdots \cap G_{j_s} \neq \varnothing \Longleftrightarrow F_{j_1} \cap \cdots \cap F_{j_s} \cap (\cap_{i \in \sigma(F)} F_i) \neq \varnothing \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \{j_1, \ldots, j_s\} \sqcup \sigma(F) \in \mathcal{K}_P \Longleftrightarrow \{j_1, \ldots, j_s\} \in L_{\sigma(F)}$$

Множества G_j и их всевозможные пересечения выпуклые, поэтому покрытие $\{G_j\}$ стягиваемо, и его нерв гомотопически эквивалентен ∂F. Каждая отсутствующая вершина в грани F лежит на границе ∂F, отсюда следует:

$$L_{\sigma(F)} \simeq \partial F \simeq S^{dimF-1} \setminus \{r\ pt\}$$

Ниже лемма продемонстрирована для 2-грани 3-мерного многогранника, удалены 2 вершины :



$\triangleleft$

Утверждение 3.1 *Пусть многогранник P является некомпактным n-мерным многогранником Коксетера. Тогда:*

1)Если из P удалить все вершины, не лежащие на абсолюте, его нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$ будет Коэн-Маколеевым. В частности нерв-комплекс идеального многогранника Коксетера Коэн-Маколеев.

2)Пусть P, имеет только одну вершину на абсолюте. Тогда нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$ Коэн-Маколеев.

3)Если идеальных вершин больше одной, а многогранник P не является идеальным, свойство Коэн-Маколеевости выполняться не будет.

$\triangleright$

Сначала проверим 1 пункт утверждения. $\mathcal{K}_P$ является $(n-2)$-мерным чистым комплексом, если любая грань F представлена в виде пересечения $codimF$ гиперграней.

Многогранник Коксетера комбинаторно в гранях (кроме идеальных вершин) выглядит как куб . Куб простой многогранник, и у него любая грань F представляется в виде пересечения $codimF$ гиперграней, значит $dim\mathcal{K}_P = n-2$, а все максимальные симплексы имеют одинаковую размерность и комплекс чистый, поэтому можем легко считать размерность линков:

$$dim(link(\sigma(F))) = dim(\mathcal{K}_P) - codimF$$

Нужно проверить следующие равенства на гомологии:

$$\widetilde{H}_i(link(\sigma(F))) = 0 \quad \forall i < dim(link(\sigma(F)))$$

По **Лемме 3.1** $link(\sigma(F))$ представляет собой сферу без некоторого набора точек, то есть гомотопически это букет из некоторого числа сфер: $link(\sigma(F)) \simeq \bigvee S^{dimF-2}$, $dimF > 2$.

Если $dimF = 2$, то получается окружность без некоторого набора точек, гомотопически это набор точек. Если $dimF = 1$, то $link(\sigma(F))$ представляет собой либо 1 точку, либо 2, либо является пустым множеством. Если $dimF = 0$, то $link(\sigma(F)) = \varnothing$. Во всех случаях, когда $dimF < 3$, $dim(link(\sigma(F)))$ равно 0 или 1. То есть, условие на гомологии линка выполняется.

Пусть $dimF \geq 3$. Гомомологии линка $link(\sigma(F))$ во всех случаях нулевые до размерности $dimF - 2$, так как $link(\sigma(F)) \simeq \bigvee S^{dimF-2}$. То есть, нужно проверить, что на размерность линка выполнено следующее неравенство

$$dimF - 2 \geq dim(link(\sigma(F)))$$

$$dim(link(\sigma(F)) = dim(\mathcal{K}_P) - codimF = (n-2) - (n - dimF) = dimF - 2$$

Теперь проверим 2 часть утверждения. Пусть многогранник P некомпактный с 1 идеальной вершиной.

Если многогранник P имеет размерность n, то нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$ представляет из себя триангулированную сферу S^{n-1} с вырезанным триангулированным шаром D^{n-1} - идеальная вершина соответствует триангулированной сфере $\mathcal{S} = S^{n-2} = \partial D^{n-1}$, которая является подкомплексом в $\mathcal{K}_P$.

Это соответствие следует из того, что все грани $F \subset P$ (за исключением одной идеальной вершины) комбинаторно устроены как грани простого многогранника: любая грань $F \subset P$ является пересечением $codimF$ гиперграней. То есть, каждое ребро, выходящее из идеальной вершины, даёт $(n-2)$-мерный симплекс в нерв-комплексе и все эти симплексы образуют триангуляцию сферы $\mathcal{S}$.

Линки показывают локальную структуру симплициального комплекса. Поэтому достаточно проверить, что $\widetilde{H}_i(lk(\sigma)) = 0 \ \forall \ \sigma \in \mathcal{S}, \ i < dim(lk(\sigma))$.

Если $\sigma \in \mathcal{S}$, то $lk(\sigma)$ состоит из симплексов 2 типов: одни лежат в $\mathcal{S}$ и образуют сферу $S^{n-2-dim\sigma}$, а другие в $\mathcal{K}_P \backslash \mathcal{S}$ и образуют часть сферы $S^{n-1-dim\sigma}$ с границей $S^{n-2-dim\sigma}$. Линки являются стягиваемыми множествами, поэтому приведённые гомологии нулевые в любой размерности.

Итого все линки имеют нулевые приведённые гомологии в нужных размерностях, поэтому нерв-комплекс многогранника Коксетера с одной идеальной вершиной Коэн-Маколеев.

Пусть есть $r > 1$ идеальных вершин, но P не является идеальным. Тогда $\mathcal{K}_P$ это сфера S^{n-1} с r непересекающимися дырками - это снова триангулированные сферы, а значит $\mathcal{K}_P \simeq \bigvee\limits_{r-1} S^{n-2}$. Линк пустого множества это $\mathcal{K}_P$ - $(n-1)$-мерный комплекс, у которого в размерности $n-2$ имеются ненулевые гомологии, поэтому $\mathcal{K}_P$ не Коэн-Маколеев. $\triangleleft$

Далее докажем, что из Коэн-Маколеевости нерв-комплекса $\mathcal{K}_P$ следует явное описание кольца $\mathbb{Z}_2$-когомологий малых накрытий над P.

Следующая лемма пригодится при использовании дга-модели.

Лемма 3.2 *Пусть P прямоугольный многогранник конечного объёма в $\mathbb{L}^n$.*

1)Все вершины P лежат на абсолюте $\partial\mathbb{L}^n$. Тогда

$$Tor^{-i}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^{n-1})}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = 0 \ \forall \ i > 0$$

2)На абсолюте $\partial\mathbb{L}^n$ лежит только одна вершина. Тогда

$$Tor^{-i}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^{n})}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = 0 \ \forall \ i > 0$$

$\triangleright$

Далее $k = n-1$ (в пункте 1) или $k = n$ (в пункте 2). Будем доказывать оба пункта одновременно.

Проективной размерностью $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]$ как модуля над кольцом $H^*(B\mathbb{Z}_2^k)$ будем называть число

$$pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)}\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = max\{i : Tor^{-i}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) \neq 0\}$$

Используем формулу Ауслендера-Буксбаума:

$$pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)}\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] + depth\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = depthH^*(B\mathbb{Z}_2^k)$$

depth совпадают с размерностями Крулля, которые в силу Коэн-Маколеевости равны одновременно $n-1$ (в пункте 1)) или n (в пункте 2)), поэтому получаем $pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)}\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = 0$, откуда $Tor^{-i}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)} \neq 0$ только для $i = 0$.
$\triangleleft$

Так как гиперболические многообразия над прямоугольными многогранниками гомотопически эквивалентны частичным факторам вещественных момент-угол пространств [13], задача сводится к изучению колец когомологий частичных факторов.

Лемма 3.3 *Пусть P прямоугольный многогранник конечного объёма в $\mathbb{L}^n$. Тогда*

$$N(P,\Lambda) \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/Ker\Lambda$$

Замечание 3.1 *Под $N(P,\Lambda)$ понимается обозначение 2.1, считается, что P допускает характеристическую матрицу Λ.*

Опишем дга-модель Франца для когомологий частичных факторов [5]. Нас будет интересовать частный случай: когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, хотя модель допускает обобщение на произвольное коммутативное кольцо коэффициентов.

На $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ действует группа $G = \mathbb{Z}_2^m$, где m число вершин в комплексе $\mathcal{K}$.

Пусть $K \subset G$ подгруппа, которая действует свободно на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$. Факторпространство по этому действию называется вещественным торическим пространством.

Фиксируем изоморфизм $L = G/K \cong \mathbb{Z}_2^n$. Факторотображение $\Lambda : G \to L$ можно интерпретировать $n \times m$ матрицей $\Lambda = (\lambda_{ij})$, где $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}_2$.

На L определены n координатных функций $s_1 \ldots, s_n : L \to \mathbb{Z}_2$, которые порождают $\mathbb{Z}_2$-алгебру $\mathcal{F}(L)$ всех функций $L \to \mathbb{Z}_2$.

Введём структуру дифференциальной биградуированной алгебры на произведении:

$$A(\mathcal{K}, L) = \mathbb{Z}_2\left[\mathcal{K}\right] \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathcal{F}(L)$$

$\mathbb{Z}_2\left[\mathcal{K}\right]$ и $\mathcal{F}(L)$ являются подалгебрами, на перемножение элементов этих алгебр накладываются дополнительные соотношения:

$$s_i t_j = t_j s_i + \lambda_{ij} t_j$$

Дифференциал на $A(\mathcal{K}, L)$ определяется следующим образом

$$ds_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} t_j$$

$$dt_i = 0$$

Биградуировка определяется так $bideg(s_i) = (-1, 0)$, $bideg(t_j) = (0, 1)$. Группа L действует на $A(\mathcal{K}, L)$ через действие на функциях $L \to \mathbb{Z}_2$.

Как доказано в работе [5], построенная дифференциальная градуированная алгебра является дга-моделью для когомологий вещественных торических простраств.

Утверждение 3.2 *Дифференциальная градуированная алгебра $A(\mathcal{K}, L)$ квазиизоморфна алгебре сингулярных коцепей $C^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/K; \mathbb{Z}_2)$. Квазиизоморфизм L-эквивариантен и естественен относительно включения подкомплексов $\mathcal{K}$. В частности,*

$$H^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/K; \mathbb{Z}_2) = H^*(A(\mathcal{K}; L))$$

Будем считать, что P идеальный прямоугольный многогранник размерности n (в случае одной идеальной вершины дальнейшая работа с дга моделью аналогичная) с характеристической матрицей Λ. Известно, что $N(P,\Lambda) \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/Ker\Lambda$. Поэтому для вычисления когомологий можно воспользоваться дга-моделью, описанной выше.

Явно посчитаем коцепи и кограницы. Так как $Tor^{-i}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^{n-1})}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P],\mathbb{Z}_2) = 0\ \forall\ i>0$, не будем рассматривать коцепи, содержащие s_i.

Рассмотрим коцепной комплекс

$$C^n \xleftarrow{\partial_{n-1}} C^{n-1} \xleftarrow{\partial_{n-2}} \ldots \xleftarrow{\partial_3} C^3 \xleftarrow{\partial_2} C^2 \xleftarrow{\partial_1} C^1 \xleftarrow{\partial_0} C^0$$

$$H^0(C^*) = Ker\partial_0 = \mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_0$$

$$H^1(C^*) = Ker\partial_1/Im\partial_0 = \mathbb{Z}_2\left\langle t_1,\ldots,t_m\right\rangle/\mathbb{Z}_2\left\langle \partial_0 s_1, \partial_0 s_2,\ldots,\partial_0 s_{n-1}\right\rangle$$

$$H^2(C^*) = Ker\partial_2/Im\partial_1 = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_2/\mathbb{Z}_2\left\langle t_i ds_j\right\rangle =$$

$$H^3(C^*) = Ker\partial_3/Im\partial_2 = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_3/\mathbb{Z}_2\left\langle t_i t_j ds_k\right\rangle$$

Далее аналогично проверяется, что все когомологии до размерности $n-1$ включительно имеют вид

$$H^k(C^*) = Ker\partial_i/Im\partial_{i-1} = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_i/\mathbb{Z}_2\left\langle t_{i_1}t_{i_2}\ldots t_{i_{k-1}}ds_j\right\rangle$$

$Ker\partial_i = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_i$ всегда выполнено, так как в 0 переходят те элементы, где нет s_i, а в C^* уже учтены соотношения на t_i.

Образы дифференциалов такие потому, что являются образами $t_{i_1}\ldots t_{i_k}s_i$. Если в произведении будет не один элемент вида s_j, то в образе будет s_j в чистом виде, но у нас все коцепи, где содержатся s_j не рассматриваются в силу того, что $Tor^{-i}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^{n-1})}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P],\mathbb{Z}_2) = 0\ \forall\ i>0$

Суммируем все вычисления в следующую теорему. Обозначим $\lambda_i = \partial_0 s_i$

Теорема 3.1 *Пусть P прямоугольный $n-$многогранник конечного объема*
1)Все вершины P лежат на абсолюте. Тогда

$$H^*(N(P,\Lambda);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]/(\lambda_1,...,\lambda_{n-1})$$

2)Пусть P некомпактный с одной вершиной на абсолюте. Тогда

$$H^*(N(P,\Lambda);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]/(\lambda_1,...,\lambda_n)$$

Теперь рассмотрим такие многогранники P, которые имеют более одной вершины на абсолюте, но при этом имеется некоторое количество вершин, которые на абсолюте не лежат. В таком случае нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$ никогда не Коэн-Маколеев, поэтому описания кольца когомологий, аналогичного теореме 3.1, нет.

Кольцо когомологий $N(P,\Lambda)$ аддитивно устроено как тор-алгебра:

$$H^*(N(P,\Lambda);\mathbb{Z}_2) = Tor_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P],\mathbb{Z}_2)$$

Оказывается, что в нашем случае только Tor^0 и Tor^{-1} нетривиальны.

Теорема 3.2 *Пусть $P \subset \mathbb{L}^n$ прямоугольный многогранник конечного объёма. Пусть P имеет более 1 вершины, лежащей на абсолюте $\partial\mathbb{L}^n$. При этом имеется хотя бы 1 вершина, которая на абсолюте не лежит. Тогда*

$$Tor^{-i}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = 0 \ \forall \ i > 1$$

$\triangleright$

Воспользуемся следствием 5.3 из [12]:

$$depth\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = min_i\{\widetilde{H}_{i-dimF-2}(lkF, \mathbb{Z}_2) \neq 0, \exists F \in \mathcal{K}_P\}$$

$\mathcal{K}_P$ представляет собой сферу S^{n-1}, из которой вырезали диски D^{n-1} (каждый удалённый диск соответствует идеальной вершине в P). То есть, гомотопически $\mathcal{K}_P$ является букетом сфер S^{n-2}.

Пусть $i = n-1, F = \varnothing$. Тогда $\widetilde{H}_{n-2}(lk(\varnothing), \mathbb{Z}_2) = \widetilde{H}_{n-2}(\mathcal{K}_P, \mathbb{Z}_2) \neq 0$. Отсюда следует, что $depth\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] \leq n-1$.

Докажем, что неравенство выше на самом деле является равенством. Пусть $i < n-1$. Тогда $i - dimF - 2 < n - dimF - 3$.

Линки симплексов, которые расположены не на границе дырок в $\mathcal{K}_P$, топологически такие же, как линки симплексов на триангулированной сфере S^{n-2}, то есть $lkF = S^{n-3-dimF}$.Линки симплексов, которые лежат на границе дырок, стягиваемы. То есть, приведённые гомологии линков отличны от нуля только в размерности $n-3-dimF$, что больше, чем $i - dimF - 2$.

То есть, для любых $i < n-1$, для любых $F \in \mathcal{K}_P$: $\widetilde{H}_{i-dimF-2}(lkF, \mathbb{Z}_2) = 0$. А значит $depth\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = n-1$.

Используем формулу Ауслендера-Буксбаума:

$$pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] + depth\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = depthH^*(B\mathbb{Z}_2^n)$$

Из формулы выше следует, что $pdim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^n)}\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = 1$

$\triangleleft$

Замечание 3.2 *В случае теоремы 3.2 и Tor^0, и Tor^{-1} всегда нетривиальны, усилить теорему нельзя ни для какого многогранника P.*

Tor^0 явно описывается образующими и соотношениями аналогично теореме 3.1 и поэтому нетривиален для любого P.

Tor^{-1} не может быть тривиальным потому, что, как следует из работы Дэвиса-Янушкевича [2], $\mathbb{Z}_2$-когомологии $N(P, \Lambda)$ описываются только через Tor^0 тогда и только тогда, когда нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$ Коэн-Маколеев. А свойство Коэн-Маколеевости нерв-комлпекса для P из теоремы 3.2 не выполняеися никогда.

Список литературы

[1]А.Ю. Веснин, *Трехмерные гиперболические многообразия типа Лебелля*, Сиб. матем . журн ., 28:5 (1987), 50–53;

[2]M.W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and*

torus actions, Duke Math. J., 62:2 (1991), 417–451.
[3]Anton Aizenberg and Victor Buchstaber, *Nerve complexes and moment-angle spaces of convex polytopes.* Trudy Mat. Inst. Steklova 275 (2011), 22–54
[4]Li Cai, *On products in a real moment-angle manifold* (2015). https://arxiv.org/pdf/1410.5543.pdf
[5]Matthias Franz, *Dga models for moment-angle-complexes* (2022). https://arxiv.org/pdf/2006.01571.pdf
[6]В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак, *Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками* (2017). Успехи мат. наук, т. 72, вып. 2 (434)
[7] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
[8]Э.Б. Винберг, *Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности*, Тр. ММО, 47, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 68–102;
[9]M. Franz *The cohomology rings of real toric spaces and smooth real toric varieties*, https://arxiv.org/pdf/2008.08961.pdf (2021)
[10]G. Reisner *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings*, Adv. Math. 14 (1976), 30-49.
[11]Leonid Potyagailo, Ernest Vinberg *On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces*, Comment. Math. Helv. 80 (2005), 63–73
[12]Welker, V. *Which Properties of Stanley–Reisner Rings and Simplicial Complexes are Topological?*. In: Peeva, I. (eds) Commutative Algebra. Springer, Cham.
[13]Цыганков Д. *Кольца когомологий гиперболических многообразий типа Лёбелля*, курсовая работа 2023 год, https://higeom.math.msu.su/course_papers/russian.html