

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Комплекс пермutoэдра и дополнения конфигураций диагональных подпространств

Выполнил студент 503 группы
Триль Всеволод Аркадьевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2025 г.

Содержание

1 Введение	2
2 Конфигурации подпространств	3
3 Вещественные момент-угол комплексы и диагональ Ли Цая	4
4 Описание пермutoэдрального комплекса $\text{Perm}(K)$	6
5 Алгебраическая модель для клеточных коцепей	10
6 Диагональ Санеблидзе–Умбле	12
7 Связь диагоналей Ли Цая и Санеблидзе–Умбле	14

1 Введение

Конфигурации подпространств играют важную роль во многих конструкциях комбинаторики, алгебраической и симплектической геометрии, а также в механических системах. Впервые конфигурации подпространств появились в работе Арнольда [1], где дополнение к конфигурации диагональных гиперплоскостей $\{z_i = z_j\}$ было представлено как пространство Эйленберга–Маклейна группы крашенных кос. В этой же работе описано кольцо когомологий данного пространства.

Среди всех конфигураций особый интерес представляют следующие два класса. Один из них — конфигурации координатных подпространств — широко изучен в торической топологии. В работе [2] было доказано, что дополнение любой координатной конфигурации гомотопически эквивалентно момент-угол комплексу. С помощью клеточного разбиения момент-угол комплексов была построена дга-модель кольца когомологий дополнений комплексных координатных конфигураций. Также в этой работе определен гомотопический тип данных пространств для некоторых симплицальных комплексов.

Мультипликативная структура в когомологиях вещественных момент-угол комплексов изучалась в работе Ли Цая [4]. При помощи стандартного клеточного разбиения куба им была построена дга-модель кольца когомологий вещественного момент-угол комплекса.

Вторым важным классом являются конфигурации диагональных подпространств. Впервые они были изучены в статье [11], где группы когомологий дополнений вещественных диагональных конфигураций были вычислены с помощью бар-конструкции кольца Стенли–Райснера. Эти результаты были развиты в работах [2] и [7], где была установлена взаимосвязь когомологий дополнения данных конфигураций и пространств петель на полиэдральных произведениях, в частности, на момент-угол комплексах. Другая связь между диагональными конфигурациями и торической топологией была найдена в [13], где доказано, что для определенного семейства симплицальных комплексов соответствующий момент-угол комплекс гомотопически эквивалентен надстройке над дополнением диагональной конфигурации.

В данной работе мы доказываем, что дополнение вещественной конфигурации диагональных подпространств гомотопически эквивалентно некоторому клеточному

подкомплексу $\text{Perm}(\mathcal{K})$ в пермutoэдре, и описываем комбинаторику данного комплекса. Изучив структуру клеточного коцепного комплекса пространства $\text{Perm}(\mathcal{K})$, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть \mathcal{K} — симплицальный комплекс на множестве вершин $[m]$, и $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ — дополнение соответствующей конфигурации диагональных подпространств. Тогда для любого коммутативного кольца \mathbf{k} с единицей имеет место изоморфизм*

$$H^q(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \cong \text{Tor}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^{q-m}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{(1, \dots, 1)},$$

где $\Lambda[\mathcal{K}]$ — внешняя алгебра Стенли–Райснера комплекса \mathcal{K} .

Для описания умножения в кольце $H^*(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}))$ мы используем клеточную аппроксимацию диагонали Δ_{SU} в пермutoэдре, построенную в работе Санеблидзе и Умбле [12]. Там же была построена проекция $\rho: \text{Perm}^{m-1} \rightarrow I^{m-1}$ пермutoэдра на куб. Мы доказываем, что при этой проекции диагональ Санеблидзе–Умбле переходит в диагональ Ли Цая [4].

Теорема 1.2. *Пусть $\rho_*: C_*(\text{Perm}^{m-1}) \rightarrow C_*(I^{m-1})$ — гомоморфизм групп клеточных цепей, индуцированный проекцией пермutoэдра на куб. Тогда для каждой цепи $F \in C_*(\text{Perm}^{m-1})$, представляющей грань пермutoэдра, справедливо соотношение*

$$(\rho_* \otimes \rho_*)\Delta_{SU}(F) = \Delta_{LC}(\rho_*F),$$

где Δ_{LC} — диагональ на $C_*(I^{m-1})$, двойственная к умножению, описанному в [4].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы вводим основные комбинаторные конструкции. В разделе 3 мы приводим конструкцию вещественного момент-угол комплекса и описываем дга-модель его кольца когомологий, построенную в [4]. В разделе 4 мы вводим клеточный комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K})$ и доказываем гомотопическую эквивалентность данного пространства и дополнения конфигурации диагональных подпространств. В разделе 5 мы доказываем теорему 1.1, построив изоморфизм клеточного коцепного комплекса $C^*(\text{Perm}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$ и градуированной компоненты бар-конструкции внешней алгебры Стенли–Райснера $\Lambda[\mathcal{K}]$. Далее в разделе 6 мы описываем диагональ, построенную в [12]. В разделе 7 мы доказываем теорему 1.2, а также показываем, что образ комплекса $\text{Perm}(\mathcal{K})$ при проекции ρ является вещественным момент-угол комплексом.

2 Конфигурации подпространств

Конфигурацией называется конечный набор $\mathcal{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ подпространств в некотором аффинном пространстве (вещественном или комплексном).

Конфигурация $\mathcal{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ называется *координатной*, если все плоскости L_i , $i = 1, \dots, r$, являются координатными подпространствами. Любое координатное подпространство в \mathbb{R}^m имеет вид

$$C_I = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0\},$$

где $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ — подмножество в $[m]$.

Абстрактным симплицальным комплексом на множестве V называется набор \mathcal{K} подмножеств $\sigma \subset V$, которые называются *симплексами*, удовлетворяющий следующему условию: если $\sigma \in \mathcal{K}$ и $\tau \subset \sigma$, то $\tau \in \mathcal{K}$.

Одноэлементные множества $\{v\} \in \mathcal{K}$ называются *вершинами* симплициального комплекса \mathcal{K} . Если все одноэлементные множества $\{v\} \subset V$ являются вершинами комплекса \mathcal{K} , то мы говорим, что \mathcal{K} образует симплициальный комплекс на *множестве вершин* V . Обычно в качестве набора вершин V мы будем брать множество $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$.

Для каждого симплициального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ введем *вещественную координатную конфигурацию* $\mathcal{CA}(\mathcal{K})$ как

$$\mathcal{CA}(\mathcal{K}) = \{C_I : I \notin \mathcal{K}\}.$$

Дополнение данной конфигурации обозначим через $U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$, то есть

$$U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{K}} C_I.$$

Предложение 2.1 ([2], предложение 5.2.2). *Сопоставление $\mathcal{K} \mapsto U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ определяет сохраняющее порядок включения взаимно однозначное соответствие между симплициальными комплексами на множестве $[m]$ и дополнениями координатных конфигураций в \mathbb{R}^m .*

Для каждого подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ определим *диагональное подпространство* D_I в \mathbb{R}^m как

$$D_I = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_{i_1} = \dots = x_{i_k}\}.$$

Конфигурация $\mathcal{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ называется *диагональной*, если все подпространства L_i , $i = 1, \dots, r$, являются диагональными подпространствами.

Для любого симплициального комплекса \mathcal{K} на множестве вершин $[m]$ введем *вещественную диагональную конфигурацию* $\mathcal{DA}(\mathcal{K})$ как множество подпространств D_I , где I не является симплексом в \mathcal{K} :

$$\mathcal{DA}(\mathcal{K}) = \{D_I : I \notin \mathcal{K}\}.$$

Обозначим дополнение конфигурации $\mathcal{DA}(\mathcal{K})$ через $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$.

Комплексные диагональные подпространства $D_I^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^m$, диагональные конфигурации $\mathcal{DA}_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ и их дополнения $D_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ определяются аналогично.

Предложение 2.2 ([2], предложение 5.3.2). *Сопоставление $\mathcal{K} \mapsto D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ определяет сохраняющее порядок включения взаимно однозначное соответствие между симплициальными комплексами на множестве вершин $[m]$ и дополнениями конфигураций диагональных подпространств в \mathbb{R}^m .*

3 Вещественные момент-угол комплексы и диагональ Ли Цая

Для изучения дополнений координатных конфигураций оказывается полезным класс топологических пространств, называемых момент-угол комплексами.

Вещественным момент-угол комплексом, отвечающим симплициальному комплексу \mathcal{K} на множестве $[m]$, называется подкомплекс в кубе $I^m = [-1, 1]^m$ вида

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (D^1, S^0)^{\sigma} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in \sigma} D^1 \times \prod_{i \notin \sigma} S^0 \right),$$

где (D^1, S^0) — пара из отрезка $[-1, 1]$ и его границы $\{-1, 1\}$.

Теорема 3.1 ([2], теорема 5.2.5). *Имеет место деформационная ретракция*

$$U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_{\mathcal{K}}.$$

Пространство $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ обладает разбиением на клетки следующего вида. Отрезок $[-1, 1]$ обладает стандартной структурой симплицального комплекса, состоящего из вершин $\underline{t} = \{-1\}$, $t = \{1\}$ и 1-симплекса $u = [-1, 1]$. Тогда каждая клетка m -мерного куба I^m имеет вид

$$u_{\sigma} t_{\tau} \underline{t}_{[m] \setminus (\sigma \cup \tau)} := \prod_{i \in \sigma} u \times \prod_{i \in \tau} t \times \prod_{i \notin (\sigma \cup \tau)} \underline{t}, \quad (3.1)$$

где σ, τ — непересекающиеся подмножества в $[m]$. При этом клетки вещественного момент-угол комплекса $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \subset I^m$ выделяются условием $\sigma \in \mathcal{K}$.

Мы будем отождествлять клетки и соответствующие им образующие в группах клеточных цепей. Опишем базис в клеточных коцепях $C^*(I^m)$, который используется в работе [4] для задания умножения в целочисленных когомологиях $H^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$. Введем $\varepsilon := \partial u = t - \underline{t}$. Тогда выражения вида $u_{\sigma} \varepsilon_{\tau} := u_{\sigma} \varepsilon_{\tau} \underline{t}_{[m] \setminus (\sigma \cup \tau)}$ образуют базис в $C_*(I^m) = \bigotimes_{i=1}^m C_*(I)$. Двойственный базис состоит из клеточных коцепей вида

$$u^{\sigma} t^{\tau} := u^{\sigma} t^{\tau} \delta^{[m] \setminus (\sigma \cup \tau)} = \bigotimes_{i \in \sigma} u^* \otimes \bigotimes_{i \in \tau} t^* \otimes \bigotimes_{i \notin (\sigma \cup \tau)} \delta^* \in C^{|\sigma|}(I^m),$$

где $u^*, t^*, \underline{t}^*$ — двойственные коцепи к u, t, \underline{t} , а $\delta^* = t^* + \underline{t}^*$. Клеточный дифференциал на базисных коцепях имеет вид

$$du^* = 0, \quad dt^* = u^*, \quad d\delta^* = 0.$$

Умножение в $C^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ описывается следующим образом. Поскольку $I = [-1, 1]$ — симплицальный комплекс, на его симплицальных коцепях задано стандартное симплицальное \smile -умножение, а именно:

$$\begin{aligned} t^* \smile t^* &= t^*, & t^* \smile u^* &= 0, & u^* \smile t^* &= u^*, & u^* \smile u^* &= 0, \\ \delta^* \smile t^* &= t^* \smile \delta^* = t^*, & \delta^* \smile u^* &= u^* \smile \delta^* = u^*, & \delta^* \smile \delta^* &= \delta^*. \end{aligned}$$

Согласно формуле Уитни (см. [14]), данные симплицальные произведения задают произведение в клеточных коцепях $C^*(I^m)$ по правилу

$$u^{\sigma} t^{\tau} \smile u^{\sigma'} t^{\tau'} = (-1)^{(\sigma, \sigma')} u^{\sigma \cup \sigma'} t^{\tau \cup (\tau' \setminus \sigma)}$$

при $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ и $\tau \cap \sigma' = \emptyset$, в противном случае произведение обращается в нуль, а

$$(\sigma, \sigma') = |\{(i, j) : i \in \sigma, j \in \sigma', i > j\}|.$$

Умножение в $C^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ получается ограничением описанного выше умножения в $C^*(I^m)$ на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \subset I^m$.

Теорема 3.2 ([4, Theorem 5.1]). *Имеет место изоморфизм колец*

$$H(C^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}), d) \cong H^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}).$$

В [8] показано, что алгебра клеточных коцепей $C^*(\mathcal{R}_K)$ с описанным выше умножением является дга-моделью для \mathcal{R}_K , т. е. квазиизоморфна алгебре целочисленных сингулярных коцепей вещественного момент-угол комплекса \mathcal{R}_K .

Нас будет интересовать двойственная диагональ коалгебры клеточных цепей $C_*(I^m)$. В базисе $u_\sigma t_\tau \underline{t}_{[m] \setminus (\sigma \cup \tau)}$ она имеет вид

$$\Delta_{LC}(u_\sigma t_\tau \underline{t}_{[m] \setminus (\sigma \cup \tau)}) = \sum_{\sigma' \subset \sigma} (-1)^{(\sigma', \sigma \setminus \sigma')} u_{\sigma'} t_\tau \underline{t}_{[m] \setminus (\sigma' \cup \tau)} \otimes u_{\sigma \setminus \sigma'} t_{\sigma' \cup \tau} \underline{t}_{[m] \setminus (\sigma \cup \tau)}.$$

В частности, на клетке старшей размерности получаем

$$\Delta_{LC}(u_{[m]} t_\emptyset \underline{t}_\emptyset) = \sum_{\sigma \subset [m]} (-1)^{(\sigma, [m] \setminus \sigma)} u_\sigma t_\emptyset \underline{t}_{[m] \setminus \sigma} \otimes u_{[m] \setminus \sigma} t_\sigma \underline{t}_\emptyset. \quad (3.2)$$

4 Описание пермutoэдрального комплекса Perm(K)

Напомним, что *пермutoэдром* называется многогранник в \mathbb{R}^m вида

$$\text{Perm}^{m-1} = \text{conv}\{(\sigma(1), \dots, \sigma(m)) \in \mathbb{R}^m : \sigma \in S_m\}.$$

Известно следующее описание комбинаторики граней данного многогранника (см. [3, Proposition 1.5.5], [15, Chapter 0]).

Теорема 4.1. *Грани многогранника Perm^{m-1} размерности p находятся во взаимно-однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями множества $[m]$ на $m-p$ непустых подмножеств. Включение граней $G \subset F$ выполнено тогда и только тогда, когда упорядоченное разбиение, отвечающее G , является измельчением разбиения, отвечающего грани F .*

Мы воспроизведем доказательство данного факта, поскольку некоторые его детали понадобятся нам в дальнейшем.

Упорядоченное разбиение множества $[m]$ на непустые подмножества U_1, \dots, U_p будем обозначать как $(U_1 | \dots | U_p)$, а соответствующую ему грань пермutoэдра — как $F(U_1 | \dots | U_p)$. Также мы будем предполагать, что элементы каждого из множеств в разбиении упорядочены по возрастанию.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть функционал $\varphi_a(\cdot) = \langle a, \cdot \rangle$ задает опорную гиперплоскость грани $F^p \subset \text{Perm}^{m-1}$, то есть достигает на данной грани минимума среди всех точек пермutoэдра. Определим разбиение $(U_1 | U_2 | \dots | U_{m-p})$ множества $[m]$ по следующему правилу. Если координаты ковектора a упорядочены как

$$a_{u_{1,1}} = \dots = a_{u_{1,i_1}} > a_{u_{2,1}} = \dots = a_{u_{2,i_2}} > \dots > a_{u_{m-p,1}} = \dots = a_{u_{m-p,i_{m-p}}}, \quad (4.1)$$

то данному ковектору мы сопоставим разбиение на множества $U_j = \{u_{j,1}, \dots, u_{j,i_j}\}$, $j = 1, \dots, m-p$.

Найдем все вершины, $v = (\sigma(1), \dots, \sigma(m))$, которые лежат в грани F . Поскольку функционал φ_a достигает минимума на F среди всех точек пермutoэдра, выражение $\sum_{j=1}^m a_j v_j$ должно быть минимальным среди всех перестановок $\sigma \in S_m$. Следовательно, координаты вершины v упорядочены следующим образом:

$$\{v_{u_{1,1}}, \dots, v_{u_{1,i_1}}\} < \{v_{u_{2,1}}, \dots, v_{u_{2,i_2}}\} < \dots < \{v_{u_{m-p,1}}, \dots, v_{u_{m-p,i_{m-p}}}\}, \quad (4.2)$$

где под обозначением $A_1 < A_2$ мы подразумеваем, что каждый элемент множества A_1 меньше каждого элемента A_2 .

Значит, если вершина v принадлежит грани F , то соответствующая ей перестановка σ представляется в виде композиции

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{m-p}, \quad (4.3)$$

где τ_j — это биекция из множества $U_j = \{u_{j,1}, \dots, u_{j,i_j}\}$ в множество

$$\{i_1 + \dots + i_{j-1} + 1, i_1 + \dots + i_{j-1} + 2, \dots, i_1 + \dots + i_{j-1} + i_j\}.$$

При этом любая вершина, соответствующая перестановке которой удовлетворяет соотношению (4.3), будет принадлежать грани F , поскольку значение функционала φ_a на ней будет таким же, как и у вершины v .

Заметим, что любой другой функционал $\varphi_b(\cdot) = \langle b, \cdot \rangle$, задающий такое же разбиение $(U_1 | \dots | U_{m-p})$, будет достигать минимума на той же грани пермutoэдра, что и φ_a . Действительно, функционал φ_b достигает минимума на тех же вершинах v , что и φ_a .

Итак, мы доказали, что существует биекция между гранями F пермutoэдра и упорядоченными разбиениями $(U_1 | \dots | U_{m-p})$. В силу соотношений (4.1) размерность грани F , отвечающей разбиению $(U_1 | \dots | U_{m-p})$, равна p . \square

Предложение 4.2. *Рассмотрим гиперплоскость*

$$\pi = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 + \dots + x_m = \frac{m(m+1)}{2} \right\},$$

содержащую пермutoэдр Perm^{m-1} . Имеет место деформационная ретракция

$$D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \cap \pi.$$

Доказательство. Отображение

$$F(x, t) = x - t(1, \dots, 1) \left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m} - \frac{m+1}{2} \right)$$

задает гомотопию между тождественным отображением $id: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и проекцией $pr: \mathbb{R}^m \rightarrow \pi$ на гиперплоскость π . При этом для каждого $t \in [0, 1]$ выполнено включение $F(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}), t) \subset D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$, так как для любой точки $x \in D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ из всех ее координат вычитается одно и то же выражение. Поскольку $F(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}), 1) = D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \cap \pi$, мы получаем требуемую деформационную ретракцию. \square

Лемма 4.3. *Пусть $F = F(U_1 | \dots | U_{m-p})$ — грань в пермutoэдре Perm^{m-1} и $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$. Тогда $F \cap D_I \neq \emptyset$, если и только если $I \subset U_j$ для некоторого $1 \leq j \leq p$.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть $x \in F \cap D_I$. Тогда x представляется как выпуклая комбинация вершин грани F , а именно: $x = \sum_{j=1}^S t_j v_j$, где v_1, \dots, v_S — вершины грани F , $t_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^S t_j = 1$. В силу того, что для каждой вершины v_j выполнены неравенства (4.2), а величины t_j неотрицательны, мы получаем, что неравенства (4.2) выполнены и для точки x . Следовательно, I должно содержаться в каком-либо из множеств U_j .

Теперь докажем достаточность. Пусть

$$b(F) = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S v_j$$

— барицентр грани F . Из вида перестановки (4.3) получаем, что координаты точки $b(F)$, стоящие на местах U_j , равны между собой. Поскольку $I \subset U_j$, получаем $b(F) \in D_I$, и пересечение диагонального подпространства D_I с гранью F непусто. \square

Лемма 4.4. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ — некоторое подмножество в $[m]$. Тогда

$$D_I \cap \text{Perm}^{m-1} = \text{conv}\{b(F) \in \text{Perm}^{m-1} : F \cap D_I \neq \emptyset\}.$$

Доказательство. Обозначим $C = \text{conv}\{b(F) \in \text{Perm}^{m-1} : F \cap D_I \neq \emptyset\}$. При доказательстве леммы 4.3 установлено, что $b(F) \in D_I$, так что $C \subset D_I \cap \text{Perm}^{m-1}$.

Докажем обратное включение. Рассмотрим грань F наименьшей размерности среди всех, которые содержат точки $x \in D_I \cap \text{Perm}^{m-1}$, $x \notin C$, и выберем в ней такую точку x . Поскольку $x \in D_I \cap \text{Perm}^{m-1}$ и $b(F) \in D_I \cap \text{Perm}^{m-1}$, мы получаем, что отрезок, соединяющий точки x и $b(F)$, содержится в пересечении $D_I \cap \text{Perm}^{m-1}$. Прямая, содержащая этот отрезок, пересекает ∂F в некоторой точке y , которая лежит в грани меньшей размерности. Следовательно, $y \in C$. Но тогда $x \in \text{conv}(\{b(F)\} \cup C) = C$, что противоречит выбору точки x . \square

Конструкция 4.5. Для каждого симплициального комплекса \mathcal{K} на множестве вершин $[m]$ введем *пермutoэдральный комплекс* $\text{Perm}(\mathcal{K})$ как следующий клеточный подкомплекс в пермutoэдре Perm^{m-1} :

$$\text{Perm}(\mathcal{K}) = \text{Perm}^{m-1} \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{K}} \bigcup_{\substack{F=F(U_1|\dots|U_p): \\ \exists j: I=U_j}} \text{relint } F = \bigcup_{\substack{U_1, \dots, U_p \in \mathcal{K}, \\ U_1 \sqcup \dots \sqcup U_p = [m]}} F(U_1|\dots|U_p).$$

Теорема 4.6. Имеет место деформационная ретракция $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \text{Perm}(\mathcal{K})$.

Доказательство. Мы будем строить деформационную ретракцию $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \text{Perm}(\mathcal{K})$ по индукции, удаляя симплексы из Δ^{m-1} до тех пор, пока не получим симплициальный комплекс \mathcal{K} .

База индукции выполнена: если $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$, то $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m$ и согласно предложению 4.2 имеется деформационная ретракция $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \rightarrow D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \cap \pi = \pi$, а также очевидная ретракция $\pi \rightarrow \text{Perm}^{m-1} = \text{Perm}(\Delta^{m-1})$.

Теперь предположим, что симплициальный комплекс \mathcal{K} получен из \mathcal{K}' удалением некоторого максимального симплекса $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$. Тогда клеточный комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K})$ может быть получен из $\text{Perm}(\mathcal{K}')$ удалением относительных внутренних частей всех граней $F = F(U_1|\dots|U_p)$, для которых $I = U_j$ при некотором j .

Также мы имеем $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) = D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}') \setminus D_I$. Согласно предположению индукции существует деформационная ретракция $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}') \rightarrow \text{Perm}(\mathcal{K}')$. По лемме 4.4

$$D_I \cap \text{Perm}(\mathcal{K}') = \text{conv}\{b(F) : F \cap D_I \neq \emptyset\}.$$

Рассмотрим грань $F \subset \text{Perm}(\mathcal{K}')$ наибольшей размерности такую, что $F \cap D_I \neq \emptyset$. По предположению индукции $F \cap D_J = \emptyset$ для всех $J \notin \mathcal{K}$, $J \neq I$, поскольку все такие грани уже были удалены на предыдущем шаге. Следовательно, $F \setminus D_{\mathcal{A}}(\mathcal{K}) = F \setminus D_I$.

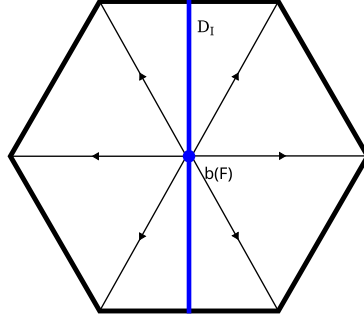


Рис. 1: Ретракция r_F

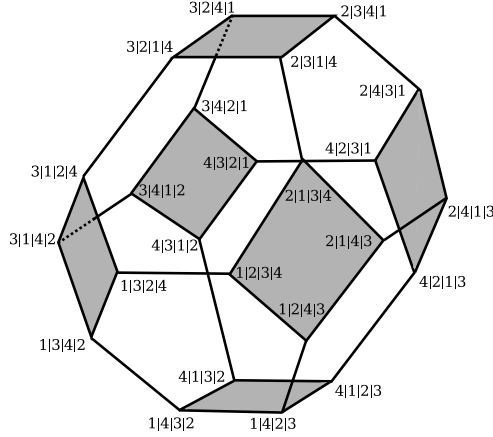


Рис. 2: Комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K})$

Рассмотрим ретракцию $r_F: F \setminus D_I \rightarrow \partial F \setminus D_I$, определенную следующим образом. Для каждой точки $x \in F \setminus D_I$ полагаем $r_F(x)$ равным пересечению луча из барицентра $b(F)$ в x с границей ∂F . В силу леммы 4.4 внутренность отрезка между $b(F)$ и $r_F(x)$ целиком содержится в $F \setminus D_I$ и, таким образом, мы имеем корректно определенную ретракцию $r_F: F \setminus D_I \rightarrow \partial F \setminus D_I$, которая продолжается тождественно для остальных точек пространства $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus D_I$. Действие ретракции для случая $m = 3$, $I = \{1, 2\}$ и $F = F(123)$ изображено на рис. 1.

В качестве гомотопии между тождественным отображением на $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus D_I$ и ретракцией r_F можно взять выпуклую гомотопию, которая корректно определена согласно лемме 4.4. Итак, мы построили ретракцию $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus D_I \rightarrow (\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus \text{relint } F) \setminus D_I$. Аналогично, выбирая грани максимальной размерности в $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus F$, имеющие непустое пересечение с D_I , мы получим деформационную ретракцию $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus D_I \rightarrow \text{Perm}(\mathcal{K})$. Там самым мы доказали индукционный переход. \square

Пример 4.7. Пусть $\mathcal{K} = \text{sk}^1 \Delta^3$ — полный граф на 4 вершинах. Тогда соответствующий ему комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K})$ изображен на рис. 2.

Используя конструкцию пермutoэдрального комплекса мы можем построить клеточную модель и для дополнений комплексных диагональных конфигураций. А именно, рассмотрим пространство $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ и стандартный пермutoэдр в нём. Обозначив индексы $(m+1, \dots, 2m)$ через $(1', \dots, m')$, можем считать, что грани данного пермutoэдра отвечают упорядоченным разбиениям множества

$$[m] \cup [m'] = \{1, 2, \dots, m, 1', 2', \dots, m'\}.$$

Теперь рассмотрим комплекс

$$\text{Perm}_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) := \text{Perm}^{2m-1} \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{K}} \bigcup_{\substack{(U_1 | \dots | U_p) \\ \exists j, k: I \subset U_j, I' \subset U_k}} \text{relint } F(U_1 | \dots | U_p),$$

где каждому набору индексов $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ мы сопоставляем набор $I' = \{i'_1, \dots, i'_s\}$ тех же индексов со штрихами.

Теорема 4.8. *Имеет место гомотопическая эквивалентность*

$$D_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) \simeq \text{Perm}_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}).$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 4.6, будем вести индукцию, удаляя грани из симплекса Δ^{m-1} до тех пор, пока не получим симплициальный комплекс \mathcal{K} . Отличие от вещественного случая заключается в том, что мы должны удалять относительные внутренности таких граней F , что $F \cap D_I^{\mathbb{C}} \neq \emptyset$, то есть относительные внутренности граней F , пересекающих одновременно и D_I , и $D_{I'}$. Согласно лемме 4.3, такие грани F отвечают разбиениям $(U_1 | \dots | U_p)$, в которых $I \subset U_j$, $I' \subset U_k$ при некоторых j и k . Барицентр таких граней лежит в пересечении $F \cap D_I^{\mathbb{C}}$ и, следовательно, мы можем определить ретракцию $r_F: F \setminus D_I^{\mathbb{C}} \rightarrow \partial F \setminus D_I^{\mathbb{C}}$ аналогично вещественному случаю, проводя лучи из барицентра $b(F)$. Дальнейшие рассуждения полностью повторяют доказательство теоремы 4.6. \square

5 Алгебраическая модель для клеточных коцепей

Пусть \mathbf{k} — коммутативное кольцо с единицей, A — градуированная \mathbf{k} -алгебра с единицей. Мы будем считать, что A связна, то есть $A_{<0} = 0$ и $A_0 = \mathbf{k} \cdot 1$, и, следовательно, определена аугментация $\varepsilon: A \rightarrow \mathbf{k} \cong A_0$, $I(A) = \ker \varepsilon$ — аугментационный идеал. Бар-конструкцией алгебры A называется цепной комплекс вида

$$\dots \rightarrow B^{-n}(A) \xrightarrow{d} B^{-n+1}(A) \rightarrow \dots \rightarrow B^{-1}(A) \xrightarrow{d} B^0(A) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \rightarrow 0,$$

где $B^{-n}(A) = A \otimes_{\mathbf{k}} \underbrace{I(A) \otimes_{\mathbf{k}} \dots \otimes_{\mathbf{k}} I(A)}_n$.

Элементы $a \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \in B^{-n}(A)$ традиционно обозначаются как $a[a_1 | \dots | a_n]$. Дифференциалы задаются формулой

$$-d(a[a_1 | \dots | a_n]) = \bar{a}a_1[a_2 | \dots | a_n] + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{a}[\bar{a}_1 | \dots | \bar{a}_{i-1} | \bar{a}_i a_{i+1} | a_{i+2} | \dots | a_n],$$

где $\bar{a}_j = (-1)^{\deg a_j + 1} a_j$. Известно, что бар-конструкция является свободной резольвентой \mathbf{k} как левого A -модуля (см. [9, Chapter X]).

После применения функтора $(\mathbf{k} \otimes_A -)$ к комплексу $(B(A), d)$ мы получим цепной комплекс $(\bar{B}(A), \bar{d})$, который называется *приведенной бар-конструкцией* кольца \mathbf{k} как левого A -модуля. Элементы приведенной бар-конструкции имеют вид $[a_1 | \dots | a_n] \in \bar{B}^{-n}(A)$, где $a_j \in I(A)$, а дифференциал \bar{d} задается формулой

$$-\bar{d}([a_1 | \dots | a_n]) = \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{a}_1 | \dots | \bar{a}_{i-1} | \bar{a}_i a_{i+1} | a_{i+2} | \dots | a_n].$$

Гомологии данного комплекса позволяют вычислять функтор Tor :

$$\text{Tor}_A^{-n}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = H^{-n}[\overline{B}(A), \overline{d}].$$

Далее в качестве алгебры A мы рассматриваем внешнюю алгебру Стенли–Райснера. Напомним, что *внешней алгеброй Стенли–Райснера* симплициального комплекса \mathcal{K} на множестве вершин $[m]$ называется факторалгебра следующего вида:

$$\Lambda[\mathcal{K}] = \Lambda[x_1, \dots, x_m] / \mathcal{I}_{SR},$$

где $\Lambda[x_1, \dots, x_m]$ — внешняя алгебра с m образующими, $\deg x_i = 1$, $i = 1, \dots, m$, $\mathcal{I}_{SR} = (x_{i_1} \cdots x_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K})$ — идеал Стенли–Райснера. Внешняя алгебра Стенли–Райснера обладает $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировкой, которая определяется по правилу: если $X = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, то $\text{mdeg}(X) = (q_1, \dots, q_m)$, где $q_j = 1$, если $j \in \{i_1, \dots, i_k\}$ и $q_j = 0$ в противном случае.

Рассмотрим приведенную бар-конструкцию $\overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}])$. Базис в $\overline{B}^{-n}(\Lambda[\mathcal{K}])$ составляют выражения вида $[X_1 | \dots | X_n]$, где X_i — некоторый моном в $\Lambda[\mathcal{K}]$, $i = 1, \dots, n$. Тем самым мы можем ввести $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировку в приведенной бар конструкции, положив $\text{mdeg}([X_1 | \dots | X_n]) = \text{mdeg}(X_1) + \dots + \text{mdeg}(X_n)$.

Нетрудно видеть, что дифференциал \overline{d} сохраняет мультиградуировку. Следовательно, приведенная бар-конструкция $(\overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}]), \overline{d})$ разлагается в прямую сумму компонент $(\overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}]), \overline{d})_{(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}$, и мы можем рассматривать \mathbf{k} -модули $\text{Tor}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}$. Далее нас будет интересовать прямое слагаемое $(\overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}]), \overline{d})_{(1, \dots, 1)}$.

Теорема 5.1. *Комплекс клеточных коцепей пространства $\text{Perm}(\mathcal{K})$ изоморфен компоненте с мультиградуировкой $(1, \dots, 1)$ в приведенной бар-конструкции внешней алгебры Стенли–Райснера:*

$$(C^p(\text{Perm}(\mathcal{K}); \mathbf{k}), d) \cong (\overline{B}^{p-m}(\Lambda[\mathcal{K}]), \overline{d})_{(1, \dots, 1)}.$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм \mathbf{k} -модулей

$$\varphi: C^*(\text{Perm}(\mathcal{K})) \rightarrow \overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}])_{(1, \dots, 1)},$$

заданный на образующих по правилу

$$\varphi(F(U_1 | \dots | U_{m-p})^*) = [X_1 | \dots | X_{m-p}],$$

где $F(U_1 | \dots | U_{m-p})^*$ — коцепь, отвечающая p -мерной грани $F^p = F(U_1 | \dots | U_{m-p})$, и $X_j = \prod_{i \in U_j} x_i$. Отображение φ является изоморфизмом \mathbf{k} -модулей, поскольку оно биективно на образующих (заметим, что $\overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}])_{(1, \dots, 1)} = 0$ при $n > m$).

Клеточный граничный гомоморфизм пермutoэдра был вычислен в работе [10]. Он имеет вид

$$\begin{aligned} \partial F(U_1 | \dots | U_{m-p}) &= \\ &= \sum_{j=1}^{m-p} \sum_{M \subset U_j} (-1)^\varepsilon \text{shuff}(M; U_j \setminus M) F(U_1 | \dots | U_{j-1} | M | U_j \setminus M | U_{j+1} | \dots | U_{m-p}), \end{aligned}$$

где $\varepsilon = m_1 + \dots + m_{j-1} + |M|$, $m_i = |U_i| - 1$, $\text{shuff}(M; U_j \setminus M)$ — знак перестановки, которая монотонно отправляет первые $|M|$ элементов множества U_j в элементы множества M , а остальные элементы отправляет в $U_j \setminus M$.

После дуализации получим, что дифференциал действует на коцепях как

$$dF(U_1 | \dots | U_{m-p})^* = \sum_{j=1}^{m-p} (-1)^{\varepsilon} \text{shuff}(U_j; U_{j+1}) F(U_1 | \dots | U_{j-1} | V_j | U_{j+2} | \dots | U_{m-p})^*,$$

где $V_j = U_j \cup U_{j+1}$ и предполагается, что его элементы упорядочены по возрастанию. Применив гомоморфизм φ , получим

$$\varphi(dF(U_1 | \dots | U_{m-p})^*) = \sum_{j=1}^{m-p} (-1)^{\varepsilon} \text{shuff}(U_j; U_{j+1}) [X_1 | \dots | (-1)^{\delta_j} X_j X_{j+1} | \dots | X_{m-p}],$$

где знак $(-1)^{\delta_j}$ выбирается так, чтобы $(-1)^{\delta_j} X_j X_{j+1} = \prod_{k \in V_j} x_k$. Заметим, что $\delta_j = \text{shuff}(U_j; U_{j+1})$, а также $m_i = \deg X_i - 1$ и, следовательно, $\varphi(dF(U_1 | \dots | U_{m-p})^*) = d(\varphi(F(U_1 | \dots | U_{m-p})^*))$. Тем самым мы показали, что φ — искомый изоморфизм цепных комплексов. \square

Следствие 5.2. Для любого коммутативного кольца \mathbf{k} с единицей имеет место изоморфизм

$$H^p(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \cong \text{Tor}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^{p-m}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{(1, \dots, 1)}.$$

Замечание. Данный изоморфизм был доказан Н. Э. Добринской в работе [7] также при помощи перехода к CW -комплексам, клетки которых являются произведениями пермutoэдров. Однако использованное ей клеточное разбиение строится менее явно, при помощи теории моноидальных пополнений, развитой в [6]. Наша конструкция позволяет описывать умножение в кольце когомологий при помощи клеточных аппроксимаций диагонали в пермutoэдре.

6 Диагональ Санеблидзе–Умбле

Поскольку $\Lambda[\mathcal{K}]$ — градуированно коммутативная алгебра, в \mathbf{k} -модуле $\text{Tor}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ существует естественное градуированно коммутативное умножение, происходящее из бар-конструкции (см. [9, Chapter X]). Тем не менее, оно не сохраняет градуировку $(1, \dots, 1)$ и потому не может быть применено для описания умножения, существующего в алгебре $H^*(\text{Perm}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$, которая аддитивно изоморфна $\text{Tor}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{(1, \dots, 1)}$.

Умножение на клеточных коцепях $C^*(\text{Perm}(\mathcal{K}))$ можно ввести при помощи клеточной аппроксимации $\tilde{\Delta}: \text{Perm}^{m-1} \rightarrow \text{Perm}^{m-1} \times \text{Perm}^{m-1}$ диагонального отображения пермutoэдра. Одна из таких клеточных аппроксимаций была построена в работе [12]. Далее мы приводим ее описание.

Матрица $O = (o_{i,j})$ размера $q \times p$ называется *упорядоченной*, если выполнены следующие условия:

- 1) $\{o_{i,j}\} = \{0, 1, \dots, q + p - 1\}$;
- 2) все строки и столбцы матрицы O ненулевые;
- 3) все ненулевые элементы матрицы O попарно различны и расположены по возрастанию в каждой строке и каждом столбце.

Множество упорядоченных матриц размера $q \times p$ обозначим через $\mathcal{O}^{q \times p}$.

Каждой упорядоченной матрице O можно сопоставить два разбиения множества $[q+p-1]$. Одно из них имеет вид $c(O) = (O_1 | \dots | O_q)$, где O_j — j -ый столбец матрицы O , а второе имеет вид $r(O) = (O^p | \dots | O^1)$, где O^i — i -ая строка матрицы O (порядок строк обращен). При этом предполагается, что из O_j и O^i удалили все нулевые элементы.

Шаговой матрицей называется упорядоченная матрица $E = (e_{i,j})$, удовлетворяющая условиям:

- 1) ненулевые значения в каждом столбце (строке) расположены в последовательных строках (столбцах);
- 2) главная диагональ матрицы E и все диагонали над и под ней содержат ровно один ненулевой элемент (т. е. среди элементов $e_{i,j}$ с фиксированным $j-i$ имеется ровно один ненулевой).

Множество шаговых матриц размера $q \times p$ обозначим через $\mathcal{E}^{q \times p}$.

Пример 6.1. Матрица $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ является шаговой. Соответствующие разбиения множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеют вид $c(E) = (14|25|3)$, $r(E) = (4|15|23)$.

Для $(i, j) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ введем операторы *сдвига вниз* $D_{i,j}: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ и *сдвига вправо* $R_{i,j}: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$, которые действуют на матрицу $O \in \mathcal{O}^{q \times p}$ следующим образом:

- 1) Если $o_{i,j} > 0$, $o_{i+1,j} = 0$, $o_{i+1,l} < o_{i,j}$ при $l < j$, $o_{i+1,l} > o_{i,j}$ при $l > j$ и $o_{i+1,l} \neq 0$, а также существует элемент $o_{i,k} \neq 0$ для некоторого $k \neq i$, то $D_{i,j}O$ получается из O перестановкой элементов $o_{i,j}$ и $o_{i+1,j}$. В противном случае $D_{i,j}O = O$.
- 2) Если $o_{i,j} > 0$, $o_{i,j+1} = 0$, $o_{l,j+1} < o_{i,j}$ при $l < i$, $o_{l,j+1} > o_{i,j}$ при $l > i$ и $o_{l,j+1} \neq 0$, а также существует элемент $o_{k,j} \neq 0$ для некоторого $k \neq j$, то $R_{i,j}O$ получается из O перестановкой элементов $o_{i,j}$ и $o_{i,j+1}$. В противном случае $R_{i,j}O = O$.

Пример 6.2. Пусть $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$R_{2,2}E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{2,2}E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{2,3}R_{2,2}E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A \in \mathcal{O}$ называется *конфигурационной*, если существует шаговая матрица E и набор операторов сдвига G_1, \dots, G_s таких, что

- 1) $A = G_s \dots G_1 E$,
- 2) если $G_s \dots G_1 = \dots D_{i_2, j_2} \dots D_{i_1, j_1} \dots$, то $i_1 \leq i_2$,
- 3) если $G_s \dots G_1 = \dots R_{i_2, j_2} \dots R_{i_1, j_1} \dots$, то $j_1 \leq j_2$.

В этом случае мы говорим, что матрица A получена из шаговой матрицы E . Множество конфигурационных матриц размера $q \times p$ обозначим через $\mathcal{C}^{q \times p}$.

Замечание. Все матрицы, описанные в примере 6.2, являются конфигурационными матрицами.

Для каждого m положим

$$\Delta_{SU}(F(1, 2, \dots, m)) = \sum_{q=1}^m \sum_{A \in \mathcal{C}^{q \times (m-q+1)}} csgn(A) F(c(A)) \otimes F(r(A)), \quad (6.1)$$

и продолжим Δ_{SU} на остальные грани $F(U_1 | \dots | U_p)$ при помощи стандартного коммутативного продолжения, то есть

$$\Delta_{SU}(F(U_1 | \dots | U_p)) = F(\Delta_{SU}(F(U_1)) | \dots | \Delta_{SU}(F(U_p))). \quad (6.2)$$

Знак $csgn(A)$ определяется следующим образом. Если матрица $A \in \mathcal{C}^{q \times p}$ получена из шаговой матрицы E , то

$$csgn(A) = (-1)^{\binom{q}{2}} rsgn(c(E)) \cdot sgn_1 r(A) \cdot sgn_2 c(E) \cdot sgn_2 c(A),$$

где

$$\begin{aligned} rsgn(U_1 | \dots | U_p) &= (-1)^{\frac{1}{2}(|U_1|^2 + \dots + |U_p|^2 - m)}, \\ sgn_1(U_1 | \dots | U_p) &= (-1)^{\sum_{i=1}^{p-1} i \cdot |U_{p-i}|} psgn(U_1 \cup \dots \cup U_p), \\ sgn_2(U_1 | \dots | U_p) &= (-1)^{\binom{p-1}{2} + \sum_{i=1}^{p-1} i \cdot |U_{p-i}|} psgn(U_1 \cup \dots \cup U_p), \end{aligned}$$

$psgn(U_1 \cup \dots \cup U_p)$ — знак перестановки множества $[m]$, отправляющей первые $|U_1|$ элементов в U_1 , следующие $|U_2|$ элементов в U_2 , ..., последние $|U_p|$ элементов в U_p .

Отметим, что диагональ (6.1) построена комбинаторно, и в работе [12] не доказано, что она является клеточной аппроксимацией. Однако в дальнейшем в [5] было приведено доказательство того, что (6.1) в самом деле гомотопна стандартной диагонали.

Пример 6.3. Пусть $m = 2$. Тогда любая упорядоченная матрица 1×2 или 2×1 является шаговой, и мы получаем, что

$$\Delta(F(12)) = F(12) \otimes F(2|1) + F(1|2) \otimes F(12).$$

В случае $m = 3$ значение $\Delta(F(123))$ вычислено явно в [12]. А именно:

$$\begin{aligned} \Delta(F(123)) &= F(1|2|3) \otimes F(123) + F(123) \otimes F(3|2|1) - \\ &- F(1|23) \otimes F(13|2) + F(2|13) \otimes F(23|1) - F(13|2) \otimes F(3|12) + \\ &+ F(12|3) \otimes F(2|13) - F(1|23) \otimes F(3|12) + F(12|3) \otimes F(23|1). \end{aligned}$$

7 Связь диагоналей Ли Цая и Санеблидзе–Умбле

Чтобы установить взаимосвязь между пермutoэдральными комплексами и вещественными момент-угол комплексами, мы воспользуемся кусочно-линейной проекцией $\rho: \text{Perm}^{m-1} \rightarrow I^{m-1}$, введенной в работе [12]. На вершинах пермutoэдра она определяется формулой:

$$\rho(F(U_1 | \dots | U_m)) = \prod_{i \in \tau} \{1\} \times \prod_{i \notin \tau} \{-1\},$$

где $\tau = \{i : U_j = \{i+1\}, U_k = \{i\} \text{ для некоторых } j < k\}$. Так как данное отображение кусочно-линейно, по образам вершин пермutoэдра мы можем восстановить образ каждой грани. А именно:

$$\rho(F(U_1 | \dots | U_p)) = \prod_{i \in \sigma} D^1 \times \prod_{i \in \tau} \{1\} \times \prod_{i \notin \sigma \cup \tau} \{-1\}, \quad (7.1)$$

где $\sigma = \{i \mid \exists j : \{i, i+1\} \subset U_j\}$, $\tau = \{i \mid \exists j < k : i+1 \in U_j, i \in U_k\}$.

Лемма 7.1. *Размерность проекции $\rho(F)$ грани $F = F(U_1 | \dots | U_p)$ совпадает с размерностью данной грани тогда и только тогда, когда каждое множество U_j имеет вид*

$$U_j = \{a_j, a_j + 1, \dots, a_j + |U_j| - 1\}, \quad a_j \in [m].$$

Доказательство. Из описания граней пермutoэдра мы находим, что $\dim F = m - p$. Соотношение (7.1) влечёт, что $\dim \rho(F) = |\sigma|$. Заметим, что для каждого $j = 1, 2, \dots, p$ элемент $\max(U_j)$ не лежит в σ , то есть $|\sigma| \leq m - p$. Следовательно, равенство $\dim \rho(F) = \dim F$ достигается тогда и только тогда, когда все остальные элементы $[m]$ лежат в σ . Данное условие равносильно тому, что все U_j имеют требуемый вид. \square

Определение 7.2. Будем говорить, что элементы $i, i+1, \dots, i+k$ упорядоченной матрицы O образуют *змею*, если можно указать такие $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_r = k$, что $i+k_j, i+k_j+1, \dots, i+k_{j+1}$ лежат в одной строке при четных j и в одном столбце при нечетных j или, наоборот, в одном столбце при четных j и в одной строке при нечетных. Числа $i+k_0, \dots, i+k_r$ будем называть *узлами змеи*.

Змею, содержащуюся в упорядоченной матрице O , будем называть *непрерывной*, если все ее элементы, лежащие в одной строке (в одном столбце), расположены в последовательных столбцах (соответственно, в последовательных строках).

Пример 7.3. Рассмотрим матрицу

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

В ней имеются две змеи, состоящие из элементов $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ и $\{9, 10, 11\}$. Змеи, образованные элементами $\{2, 3, \dots, 7\}$ и $\{10, 11\}$, являются непрерывными.

Лемма 7.4. *Пусть матрица $A \in O^{q \times (m-q+1)}$ такова, что размерности граней $F(c(A))$ и $F(r(A))$ не меняются при проекции ρ . Тогда все ненулевые элементы матрицы A образуют одну непрерывную змею.*

Доказательство. В силу того, что грани $F(c(A))$ и $F(r(A))$ сохраняют размерность при проекции ρ , ненулевые элементы в каждой строке и в каждом столбце являются подряд идущими числами. Для каждого элемента $i \in [m]$ построим максимальную змею S_i , его содержащую. А именно, найдем столбец A_j и отметим в нем все ненулевые элементы $\{i-l_1, i-l_1+1, \dots, i+k_1\}$ (возможно, l_1 или k_1 равны нулю). При всех $-l_1 < j < k_1$ элемент $i+j$ является единственным ненулевым в своей строке. В самом деле, ненулевые элементы в каждой строке являются подряд идущими числами, а числа $i+j-1$ и $i+j+1$ лежат в одном столбце A_j .

Аналогично получаем, что в строке, содержащей $i - l_1$, нет ненулевых элементов справа от него. Отметив в этой строке ненулевые числа $i - l_2, i - l_2 + 1, \dots, i - l_1$, получим, что в столбцах, содержащих элементы $i - l_2 + 1, \dots, i - l_1 - 1$, нет других ненулевых, а в строке, содержащей $i - l_2$, нет элементов снизу. Следовательно, числа $\{i - l_2, \dots, i - l_1, \dots, i + k_1\}$ образуют змею. Будем включать в эту змею строки или столбцы, содержащие начальный или конечный элемент, до тех пор, пока на очередном шаге не придем к элементам $i - l_a$ и $i + k_b$, которые являются единственными в своей строке или столбце, не включенном в рассматриваемую змею. В результате получим максимальную змею S_i .

Отметим строки и столбцы матрицы A , в которых расположен хоть один элемент змеи S_i . На пересечении таких строк и столбцов стоят либо нули, либо ненулевые элементы змеи. Отсюда получаем, что суммарное количество строк и столбцов, занимаемых змеями, на 1 больше, чем количество элементов в ней.

Осталось заметить, что каждый элемент $i \in [m]$ лежит ровно в одной максимальной змее, и, следовательно, суммарное количество элементов всех змей должно равняться m . Так как в матрице A нет нулевых строк и столбцов, каждая строка и каждый столбец матрицы отвечает ровно одной змее и, следовательно, сумма всех строк и столбцов змей равна $q + (m - q + 1) = m + 1$. Значит, максимальная змея ровно одна, и она содержит все ненулевые элементы матрицы. Эта змея действительно является непрерывной, поскольку в противном случае в матрице A будут нулевые строки или столбцы. \square

Теорема 7.5. Для любой грани $F(U_1 | \dots | U_p) \subset \text{Perm}^{m-1}$ справедливо равенство

$$(\rho_* \otimes \rho_*) \Delta_{SU} F(U_1 | \dots | U_p) = \Delta_{LC}(\rho_* F(U_1 | \dots | U_p)).$$

Доказательство. Заметим, что в силу правила коммутативности (6.2) достаточно рассматривать гомоморфизм только на грани максимальной размерности. Рассмотрим $\Delta_{SU}([m])$. Из леммы 7.4 мы получаем, что под действием гомоморфизма $\rho_*: C_{m-1}(\text{Perm}^{m-1}) \rightarrow C_{m-1}(I^{m-1})$ в выражении (6.1) останутся только те слагаемые, которые отвечают конфигурационным матрицам, состоящим из одной непрерывной змеи.

Мы утверждаем, что все матрицы, удовлетворяющие условию леммы 7.4, являются конфигурационными. В самом деле, всякая упорядоченная матрица A , элементы которой образуют непрерывную змею с узлами $1 = i_0, i_1, \dots, i_r = m$, может быть получена операторами сдвига из шаговой матрицы E следующего вида. Предположим, что элементы $\{1, 2, \dots, i_1\}$ лежат в одной строке, а число r четно. В первой строке E стоят подряд все наборы чисел вида $\{1, 2, \dots, i_1, i_2 + 1, i_2 + 2, \dots, i_3, i_4 + 1, i_4 + 2, \dots, i_{r-1}\}$, а в первом столбце — числа $\{1, i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, i_2, i_3 + 1, i_3 + 2, \dots, i_r\}$. (При нечетном r нужно поменять местами i_{r-1} и i_r , а если элементы $\{1, 2, \dots, i_1\}$ лежат в одном столбце, то нужно транспонировать матрицу.)

На j -ом шаге мы будем сдвигать столбец элементов $\{i_j + 1, \dots, i_r\}$ вправо до столбца, содержащего элемент i_j . Затем на $(j + 1)$ -ом шаге сдвигаем строку элементов $\{i_{j+1} + 1, \dots, i_{r-1}\}$ вниз до строки, содержащей элемент i_{j+1} . Далее процедура выполняется до получения матрицы A . Первые два шага этой процедуры выглядят

следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i_1 & i_2 + 1 & \dots & i_{r-1} \\ i_1 + 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i_1 + 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ i_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ i_r & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & i_1 + 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & i_1 + 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i_2 & i_2 + 1 & \dots & i_{r-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i_r & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Положим $\sigma = \{i_1, \dots, i_2 - 1, i_3, \dots, i_4 - 1, \dots, i_r - 1\}$ и $\sigma' = \{1, \dots, i_1 - 1, i_2, \dots, i_3 - 1, \dots, i_r\}$. Из выражения (7.1) следует, что $\rho_* F(c(A)) = u_\sigma t_\emptyset t_{\sigma'}$, $\rho_* F(r(A)) = u_{\sigma'} t_\sigma t_\emptyset$. Поскольку каждое подмножество $\sigma \subset [m]$ реализуется в виде ровно одной змеи, мы получаем:

$$(\rho_* \otimes \rho_*)(\Delta_{SU}([m])) = \sum_{\sigma \subset [m]} (-1)^\varepsilon u_\sigma t_\emptyset t_{\sigma'} \otimes u_{\sigma'} t_\sigma t_\emptyset.$$

Непосредственные вычисления показывают, что знак $(-1)^\varepsilon$ совпадает со знаком из формулы (3.2) для Δ_{LC} . \square

Теорема 7.6. Пусть \mathcal{K} — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда образ пермutoэдрального комплекса $\text{Perm}(\mathcal{K})$ при проекции $\rho: \text{Perm}^{m-1} \rightarrow I^{m-1}$ является вещественным момент-угол комплексом $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ для некоторого симплициального комплекса $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{K})$ на множестве $[m-1]$.

Доказательство. Для каждого $J \subset [m-1]$ будем рассматривать прообразы множества $(D^1, S^0)^J$ при отображении $\rho: \text{Perm}^{m-1} \rightarrow I^{m-1}$. Запишем J в виде $J = \{j_1, j_1 + 1, \dots, j_1 + k_1, j_2, j_2 + 1, \dots, j_2 + k_2, \dots, j_s, j_s + k_s\}$, где $j_{i+1} > j_i + k_i + 1$.

В силу соотношения (7.1), проекция грани $F(U_1 | \dots | U_p)$ пермutoэдра попадает в грань размерности $|J|$ из $(D^1, S^0)^J$ тогда и только тогда, когда каждое множество $V_l = \{j_l, j_l + 1, \dots, j_l + k_l + 1\}$ содержится в некотором U_i . Для того, чтобы грань $F(U_1 | \dots | U_p)$ с таким свойством содержалась в комплексе $\text{Perm}(\mathcal{K})$, необходимо, чтобы все V_l содержались в \mathcal{K} . Обратно, пусть все V_l лежат в \mathcal{K} . Тогда объединение образов граней, отвечающих разбиениям $[m]$ на множества $\{V_1, \dots, V_s\} \cup ([m] \setminus \bigcup_i V_i)$ во всевозможном порядке, покрывает все произведение $(D^1, S^0)^J$.

Для завершения доказательства остается заметить, что наборы множеств J , для которых выполнено $(D^1, S^0)^J \subset \rho(\text{Perm}(\mathcal{K}))$, действительно образуют симплициальный комплекс. \square

Из доказательства теоремы мы можем дать следующее описание симплициального комплекса $\mathcal{L}(\mathcal{K})$. Множество $J \subset [m-1]$ лежит в симплициальном комплексе $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда любой набор подряд идущих элементов $\{j, j+1, \dots, j+k\}$ данного множества J в объединении с $\{j+k+1\}$ образует симплекс в \mathcal{K} .

Пример 7.7. 1. Пусть $\mathcal{K}_1 = \text{sk}^1 \Delta^3$ — полный граф на 4 вершинах, как в примере 4.7. Тогда данному симплициальному комплексу соответствует комплекс $\mathcal{L}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$ на множестве $[3] = \{1, 2, 3\}$. Момент-угол комплекс, отвечающий \mathcal{L}_1 , изображен на рис. 3 справа. При проекции $\rho: \text{Perm}(\mathcal{K}_1) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{L}_1}$ передняя и задняя двумерные грани $F(12|34)$ и $F(34|12)$ отображаются гомеоморфно в двумерные грани куба, лежащие соответственно в плоскостях $\{y = -1\}$ и $\{y = 1\}$. Верхняя

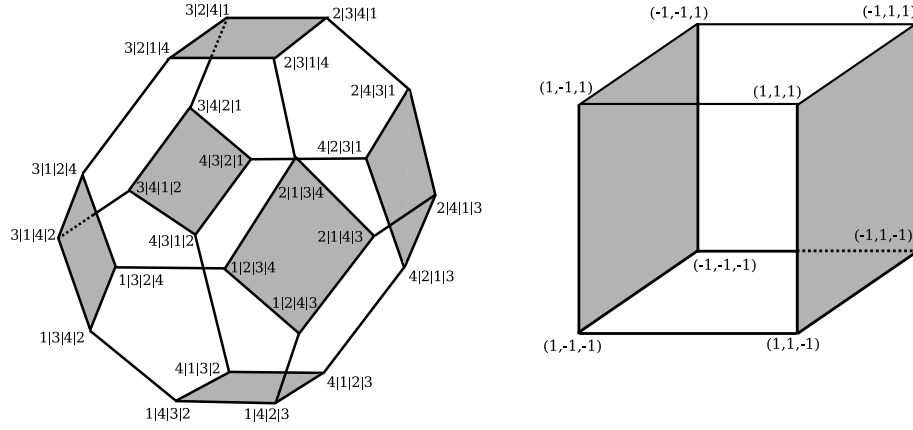


Рис. 3:

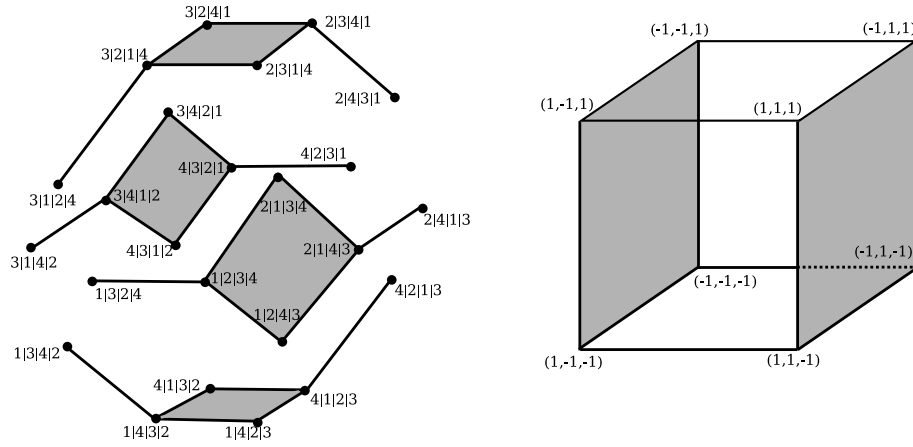


Рис. 4:

и нижняя грани $F(23|14)$ и $F(14|23)$ отображаются соответственно в ребра на прямых $\{x = 1, z = -1\}$ и $\{x = -1, z = 1\}$. Левая и правая грани $F(13|24)$ и $F(24|13)$ отображаются в вершины $(1, -1, 1)$ и $(-1, 1, -1)$ соответственно.

2. Пусть теперь $\mathcal{K}_2 = 4 \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ \bullet & \bullet \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}$ — граница четырехугольника. Соответствующий пермutoэдральный комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K}_2)$ и его образ $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_2}$ при проекции ρ изображены на рис. 4. Мы видим, что симплицальный комплекс \mathcal{L}_2 совпадает с комплексом \mathcal{L}_1 из п. 1.

3. Сопоставление $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{K})$, вообще говоря, не уважает комбинаторные эквивалентности. Например, рассмотрим симплицальный комплекс $\mathcal{K}_3 = 4 \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ \bullet & \bullet \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}$, полученный перенумерацией вершин в симплицальном комплексе \mathcal{K}_2 . Пермutoэдральный комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K}_3)$ также комбинаторно эквивалентен комплексу $\text{Perm}(\mathcal{K}_2)$, однако его образом при отображении ρ являются четыре ребра куба. Они образуют момент-угол комплекс $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_3}$, отвечающий одной вершине $\{2\}$ на множестве $[3]$, что не является комплексом, комбинаторно эквивалентным \mathcal{L}_2 . Пермutoэдральный комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K}_3)$ и момент-угол комплекс $\mathcal{R}_{\mathcal{L}_3}$ изображены на рис. 5.

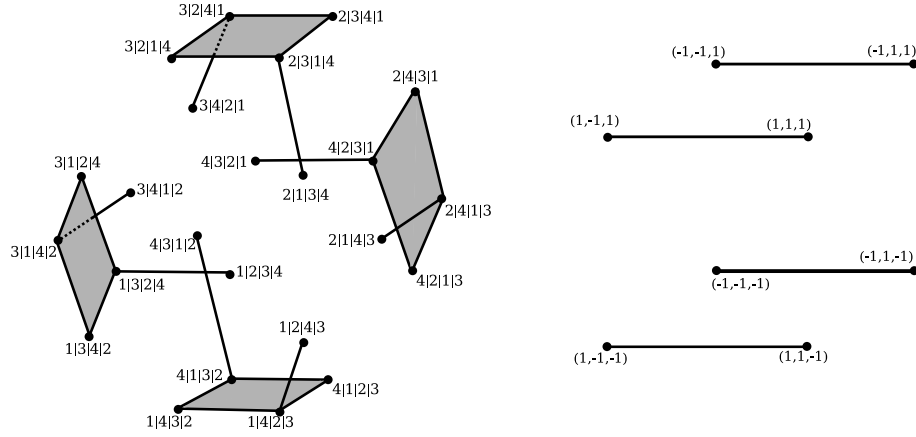


Рис. 5:

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд. *Кольцо когомологий группы крашенных кос.* Матем. заметки 5 (1969), вып. 2, стр. 227–231.
- [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов *Действия торов, комбинаторная топология и го-мологическая алгебра.* Успехи мат. наук 55 (2000), вып. 5, стр. 3–106.
- [3] V. M. Buchstaber, T. E. Panov *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [4] Li Cai. *On products in a real moment-angle manifold.* Journal of the Mathematical Society of Japan 69 (2017), no. 2, 503–528.
- [5] B. Delcroix-Oger, G. Laplante-Anfossi, V. Pilaud, K. Stoeckl. *Cellular diagonals of permutahedra.* Preprint (2023); arXiv: 2308.12119
- [6] Н. Э. Добринская. *Конфигурационные пространства частиц с метками и ко-нечные комплексы Эйленберга–Маклейна.* Труды МИАН 252 (2006), стр. 37–54.
- [7] N. E. Dobrinskaya. *Loops on polyhedral products and diagonal arrangements.* Preprint (2009); arXiv: 0901.2871
- [8] M. Franz. *dga models for moment-angle complexes.* In: *Toric Topology and Polyhedral Products.* Fields Inst. Commun., vol. 89, Springer, 2024, pp. 121–135.
- [9] S. Mac Lane. *Homology.* Springer, Berlin, 1963.
- [10] R. J. Milgram. *Iterated loop spaces.* Ann. of Math. (2) 84 (1966), no. 3, 386–403.
- [11] I. Peeva, V. Reiner, V. Welker. *Cohomology of real diagonal subspace arrangements via resolutions.* Compositio Math. 117 (1999), no. 1, 99–115.
- [12] S. Sanedlidze, R. Umble. *Diagonals on the permutahedra, multiplihedra and associahedra.* Homology Homotopy Appl. 6 (2004), no. 1, 363–411.
- [13] V. A. Tril. *On the connection between coordinate and diagonal arrangement complements.* Preprint (2024); arXiv: 2409.18001.

- [14] H. Whitney. *On products in a complex*. Ann. of Math. (2) 39 (1938), no. 2, 397—432.
- [15] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Grad. Texts in Math., 152, Springer-Verlag, New York, 1995.