

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Граничный комплекс пермutoэдра и дга-модель для дополнений к диагональным конфигурациям

Выполнил студент 403 группы
Триль Всеволод Аркадьевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2024 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Основные определения	3
3	Описание комплекса $\text{Perm}(\mathcal{K})$	5
4	Алгебраическая модель для клеточных коцепей	7
5	Клеточная аппроксимация диагонали	9

1 Введение

Конфигурации подпространств играют важную роль во многих конструкциях комбинаторики, алгебраической и симплектической геометрии, а также в механических системах. Впервые конфигурации подпространств появились в работе Арнольда [1], где дополнение к конфигурации диагональных гиперплоскостей $\{z_i = z_j\}$ было представлено как пространство Эйленберга—Маклейна группы крашенных кос. В этой же работе описано кольцо когомологий данного пространства.

Среди всех конфигураций особый интерес представляют следующие два класса. Один из них — координатные конфигурации — широко изучен в торической топологии. В работе [4] доказано, что дополнение к любой координатной конфигурации гомотопически эквивалентно момент-угол комплексу, и с помощью клеточного разбиения момент-угол комплексов построена диа-модель кольца когомологий данных дополнений. Также в данной работе определен гомотопический тип данных пространств для некоторых симплицальных комплексов.

Другой интересный класс состоит из диагональных конфигураций. Впервые они были изучены в статье [9], где группы когомологий дополнений к вещественным диагональным конфигурациям были вычислены с помощью бар-конструкции кольца Стенли—Райснера. В дальнейшем эти результаты были развиты в работах [3] и [6], где была установлена взаимосвязь когомологий дополнения к данным конфигурациям и пространств петель на полиэдральных произведениях, в частности, на момент-угол комплексах.

В данной работе мы доказываем, что дополнение к вещественной конфигурации диагональных подпространств гомотопически эквивалентно некоторому клеточному подкомплексу $\text{Perm}(\mathcal{K})$ в пермutoэдре, и описываем комбинаторику данного комплекса. Изучив структуру клеточного коцепного комплекса пространства $\text{Perm}(\mathcal{K})$, мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1.1. Пусть \mathcal{K} — симплицальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда для любого коммутативного кольца \mathbf{k} имеет место изоморфизм

$$H^q(\text{Perm}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \cong \text{Tor}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^{q-m}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{(1, \dots, 1)}.$$

Также мы приводим клеточную аппроксимацию диагонали в пермutoэдре, построенную в работе [10]. Мы дуализуем данную диагональ для описания умножения в клеточных коцепях комплекса $\text{Perm}(\mathcal{K})$ в случае, когда \mathcal{K} является графом.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы определяем объекты изучения, и вводим основные комбинаторные конструкции. В разделе 3 мы описываем клеточный комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K})$ и доказываем гомотопическую эквивалентность данного пространства и дополнения к конфигурации диагональных подпространств. В разделе 4 мы доказываем Теорему 1.1, построив изоморфизм клеточного коцепного комплекса $C^*(\text{Perm}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$ и градуированной компоненты бар-конструкции внешней алгебры Стенли–Райснера $\Lambda[\mathcal{K}]$. Далее в разделе 5 мы описываем диагональ, построенную в [10], и приводим пример дуализации данной диагонали для полного графа \mathcal{K} на четырех вершинах.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя Тараса Евгеньевича Панова за постановку задачи, поддержку, плодотворные обсуждения и ценные советы.

2 Основные определения

Определение 2.1. Абстрактным симплициальным комплексом на множестве вершин V называется набор \mathcal{K} подмножеств $I \subset V$, которые называются симплексами, удовлетворяющий следующим условиям:

1. для каждого элемента $i \in V$ выполнено $\{i\} \in \mathcal{K}$;
2. если $I \in \mathcal{K}$ и $J \subset I$, то $J \in \mathcal{K}$.

Одноэлементные множества $\{i\} \in \mathcal{K}$ называются *вершинами* симплициального комплекса \mathcal{K} .

Недостающей гранью симплициального комплекса \mathcal{K} называется множество $I \subset V$, которое не содержится в \mathcal{K} , но всякое его собственное подмножество лежит в \mathcal{K} . Множество всех недостающих граней симплициального комплекса \mathcal{K} будем обозначать как $MF(\mathcal{K})$.

Обычно в качестве множества вершин V мы будем брать множество $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$.

Конфигурацией называется конечный набор $\mathcal{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ плоскостей в некотором аффинном пространстве (вещественном или комплексном). Для каждой конфигурации $\mathcal{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ в \mathbb{R}^m определим ее носитель $|\mathcal{A}|$ как

$$|\mathcal{A}| = \bigcup_{i=1}^r L_i \subset \mathbb{R}^m,$$

и дополнение $M(\mathcal{A})$ как

$$M(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^m \setminus |\mathcal{A}|,$$

и аналогично для конфигураций в \mathbb{C}^m .

Для каждого подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ определим *диагональное подпространство* D_I в \mathbb{R}^m как

$$D_I = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_{i_1} = \dots = x_{i_k}\}.$$

Конфигурация $\mathcal{A} = \{L_1, \dots, L_r\}$ называется *диагональной*, если все плоскости L_i , $i = 1, \dots, r$, являются диагональными подпространствами.

Конструкция 2.2. Для любого симплицального комплекса \mathcal{K} на множестве вершин $[m]$ введем вещественную диагональную конфигурацию $\mathcal{DA}(\mathcal{K})$ как множество подпространств D_I , где I не является симплексом в \mathcal{K} :

$$\mathcal{DA}(\mathcal{K}) = \{D_I : I \notin \mathcal{K}\}.$$

Обозначим дополнение конфигурации $\mathcal{DA}(\mathcal{K})$ через $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$.

Предложение 2.3 ([3], Предложение 5.3.2). *Соответствие $\mathcal{K} \mapsto D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ определяет сохраняющее порядок взаимно однозначное соответствие между симплицальными комплексами на множестве вершин $[m]$ и дополнениями конфигураций диагональных подпространств в \mathbb{R}^m .*

Определение 2.4. *Пермutoэдром* называется многогранник в \mathbb{R}^m вида

$$\text{Perm}_m = \text{conv}\{(\sigma(1), \dots, \sigma(m)) \in \mathbb{R}^m \mid \sigma \in S_m\}.$$

Теорема 2.5 ([4], Proposition 1.5.5). *Грани многогранника Perm_m размерности p находятся во взаимно-однозначном соответствии с упорядоченными разбиениями множества $[m]$ на $m - p$ непустых подмножеств. Включение граней $G \subset F$ выполнено тогда и только тогда, когда упорядоченное разбиение, отвечающее G , является измельчением разбиения, отвечающего грани F .*

Замечание. Упорядоченное разбиение множества $[m]$ на непустые подмножества U_1, \dots, U_p будем обозначать как $(U_1 \mid \dots \mid U_p)$.

Доказательство. Пусть функционал $\varphi_a(\cdot) = \langle a, \cdot \rangle$ задает опорную гиперплоскость грани $F^p \subset \text{Perm}_m$, то есть достигает на данной грани минимума среди всех точек пермutoэдра. Определим разбиение $(U_1 \mid U_2 \mid \dots \mid U_{m-p})$ множества $[m]$ по следующему правилу. Если координаты ковектора a упорядочены как

$$a_{u_{1,1}} = \dots = a_{u_{1,i_1}} > a_{u_{2,1}} = \dots = a_{u_{2,i_2}} > \dots > a_{u_{m-p,1}} = \dots = a_{u_{m-p,i_{m-p}}}, \quad (1)$$

то данному ковектору мы сопоставим разбиение на множества $U_j = \{u_{j,1}, \dots, u_{j,i_j}\}$, $j = 1, \dots, m - p$.

Найдем все вершины, $v = (\sigma(1), \dots, \sigma(m))$, которые лежат в грани F . Поскольку функционал φ_a достигает минимума на F среди всех точек пермutoэдра, выражение $\sum_{i=1}^m a_j v_j$ должно быть минимальным среди всех подстановок $\sigma \in S_m$. Следовательно, координаты вершины v упорядочены следующим образом:

$$\{v_{u_{1,1}}, \dots, v_{u_{1,i_1}}\} < \{v_{u_{2,1}}, \dots, v_{u_{2,i_2}}\} < \dots < \{v_{u_{m-p,1}}, \dots, v_{u_{m-p,i_{m-p}}}\}, \quad (2)$$

где под обозначением $A_1 < A_2$ мы подразумеваем, что каждый элемент множества A_1 меньше каждого элемента A_2 .

Значит, если вершина v принадлежит грани F , то соответствующая ей подстановка σ представляется в виде композиции

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{m-p}, \quad (3)$$

где τ_j — это биекция из множества $U_j = \{u_{j,1}, \dots, u_{j,i_j}\}$ в множество

$$\{i_1 + \dots + i_{j-1} + 1, i_1 + \dots + i_{j-1} + 2, \dots, i_1 + \dots + i_{j-1} + i_j\}.$$

При этом любая вершина, соответствующая подстановка которой удовлетворяет соотношению (3), будет принадлежать грани F , поскольку значение функционала φ_a на ней будет таким же, как и у вершины v .

Заметим, что любой другой функционал $\varphi_b(\cdot) = \langle b, \cdot \rangle$, имеющий такое же разбиение $(U_1 | \dots | U_{m-p})$, будет достигать минимума на той же грани пермutoэдра, что и φ_a . Действительно, функционал φ_b достигает минимума на тех же вершинах v , что и φ_a .

Итак, мы доказали, что существует биекция между гранями F пермutoэдра и упорядоченными разбиениями $(U_1 | \dots | U_{m-p})$. Остается только вычислить размерность грани F , отвечающей разбиению $(U_1 | \dots | U_{m-p})$. В силу соотношений (1) она равна p . \square

В дальнейшем мы будем отождествлять грань пермutoэдра и соответствующее ей упорядоченное разбиение. Также мы будем предполагать, что элементы каждого из множеств в разбиении упорядочены по возрастанию.

3 Описание комплекса $\text{Perm}(\mathcal{K})$

Предложение 3.1. *Рассмотрим гиперплоскость*

$$\pi = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1 + \dots + x_m = \frac{m(m+1)}{2} \right\},$$

содержащую пермutoэдр Perm_m . Имеет место деформационная ретракция

$$D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \cap \pi.$$

Доказательство. Отображение $F(x, t) = x - t(1, \dots, 1)\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m} - \frac{m+1}{2}\right)$ задает гомотопию между тождественным отображением $id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и проекцией $pr : \mathbb{R}^m \rightarrow \pi$ на гиперплоскость π . При этом для каждого $t \in [0, 1]$ выполнено включение $F(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}), t) \subset D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$, так как для любой точки $x \in D(\mathcal{K})$ из всех ее координат вычитается одно и то же выражение.

Поскольку $F(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}), 1) = D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \cap \pi$, мы получаем требуемую деформационную ретракцию. \square

Предложение 3.2. *Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ — некоторое подмножество в $[m]$, $F = (U_1 | \dots | U_{m-p})$ — грань в пермutoэдре Perm_m . Тогда $F \cap D_I \neq \emptyset$, если и только если $I \subset U_j$ для некоторого $1 \leq j \leq p$.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость

Пусть существует точка $x \in F \cap D_I$. Тогда она представляется как выпуклая комбинация вершин грани F , а именно: $x = \sum_{j=1}^S t_j v_j$, где v_1, \dots, v_S — вершины грани F , $t_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^S t_j = 1$. В силу того, что для каждой вершины v_j выполнены неравенства (2), а величины t_j неотрицательны, мы получаем, что неравенства (2) выполнены и для точки x . Следовательно, I должно содержаться в каком-либо из множеств U_j .

Теперь докажем достаточность.

Обозначим барицентр грани F за $w(F)$. Имеем $w(F) = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^S v_j$. В силу соотношений (3) получаем, что координаты точки $w(F)$, стоящие на местах U_j равны между собой. Поскольку $I \subset U_j$, получаем $w(F) \in D_I$, и пересечение D_I с гранью F непусто. \square

Лемма 3.3. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ — некоторое подмножество в $[m]$. Тогда

$$D_I \cap \text{Perm}_m = \text{conv}\{w(F) \in \text{Perm}_m \mid F \cap D_I \neq \emptyset\}.$$

Доказательство. Обозначим $C = \text{conv}\{w(F) \in \text{Perm}_m \mid F \cap D_I \neq \emptyset\}$. Из Предложения 3.2 следует включение $C \subset D_I \cap \text{Perm}_m$.

Докажем обратное включение. Рассмотрим грань F наименьшей размерности среди всех, которые содержат точки $x \in D_I \cap \text{Perm}_m$, $x \notin C$, и выберем в ней такую точку x . Поскольку $x \in D_I \cap \text{Perm}_m$ и $w(F) \in D_I \cap \text{Perm}_m$, получаем, что вся прямая, соединяющая точки x и $w(F)$, содержится в пересечении $D_I \cap \text{Perm}_m$. Данная прямая пересекает ∂F в некоторой точке y , которая лежит в грани меньшей размерности. Следовательно, $y \in C$. Но тогда $x \in \text{conv}(\{w(F)\} \cup C) = C$, что противоречит выбору точки x . \square

Конструкция 3.4. Для каждого симплициального комплекса \mathcal{K} на множестве вершин $[m]$ введем клеточный комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K})$ как подкомплекс в пермutoэдре Perm_m вида

$$\text{Perm}(\mathcal{K}) = \text{Perm}_m \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{K}} \bigcup_{\substack{F=(U_1|\dots|U_p): \\ \exists j: I \subset U_j}} \text{relint } F.$$

Теорема 3.5. Имеет место деформационная ретракция $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} \text{Perm}(\mathcal{K})$.

Доказательство. Мы будем строить деформационную ретракцию $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} \text{Perm}(\mathcal{K})$ по индукции, удаляя симплексы из Δ^{m-1} до тех пор, пока не получим симплициальный комплекс \mathcal{K} .

База индукции выполнена: если $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$, то $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m$ и согласно Предложению 3.1 имеется деформационная ретракция $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \rightarrow D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \cap \pi = \pi$, а также очевидная ретракция $\pi \rightarrow \text{Perm}_m = \text{Perm}(\mathcal{K})$.

Теперь предположим, что симплициальный комплекс \mathcal{K} получен из \mathcal{K}' удалением некоторого максимального симплекса $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$. Тогда клеточный комплекс $\text{Perm}(\mathcal{K})$ может быть получен из $\text{Perm}(\mathcal{K}')$ удалением относительных внутренних частей всех граней $F = (U_1 | \dots | U_p)$, для которых $I \subset U_j$ при некотором j .

Также мы имеем $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) = D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}') \setminus D_I$. Согласно предположению индукции существует деформационная ретракция $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}') \rightarrow \text{Perm}(\mathcal{K}')$. По Лемме 3.3 $D_I \cap \text{Perm}(\mathcal{K}') = \text{conv}\{w(F) \mid F \cap D_I \neq \emptyset\}$. Рассмотрим грань $F \subset \text{Perm}(\mathcal{K}')$ наибольшей размерности такую, что $D_I \cap F \neq \emptyset$. По предположению индукции $F \cap D_J = \emptyset$ для всех $J \notin \mathcal{K}$, $J \neq I$, поскольку все такие грани уже были удалены на предыдущем шаге. Следовательно, $F \setminus |\mathcal{DA}(\mathcal{K})| = F \setminus D_I$.

Рассмотрим ретракцию $r_F : F \setminus D_I \rightarrow \partial F \setminus D_I$, определенную следующим образом. Для каждой точки $x \in F \setminus D_I$ мы проводим луч из барицентра $w(F)$ в x и полагаем образ $r_F(x)$ равным пересечению луча и границы ∂F . В силу Леммы 3.3 построенный луч целиком содержится в $F \setminus D_I$ и, таким образом, мы имеем корректно определенную ретракцию $r_F : F \setminus D_I \rightarrow \partial F \setminus D_I$, которая продолжается тождественно для остальных точек пространства $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus D_I$. Действие ретракции для случая $m = 3$, $I = \{1, 2\}$ и $F = (123)$ изображено на Рисунке 1. В качестве гомотопии между тождественным отображением на $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus D_I$ и ретракцией r_F можно взять выпуклую гомотопию, которая корректно определена согласно Лемме 3.3.

Итак, мы построили ретракцию $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus D_I \rightarrow (\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus \text{relint } F) \setminus D_I$. Аналогично, выбирая грани максимальной размерности в $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus F$, имеющие непустое пересечение с D_I , мы получим деформационную ретракцию $\text{Perm}(\mathcal{K}') \setminus D_I \rightarrow \text{Perm}(\mathcal{K})$. Там самым мы доказали индукционный переход. \square

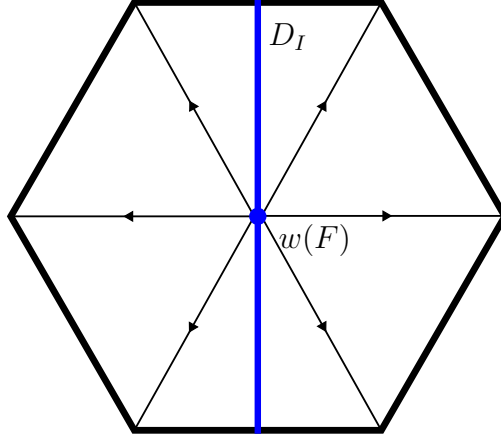


Рис. 1: Ретракция r_F

4 Алгебраическая модель для клеточных коцепей

Пусть \mathbf{k} — коммутативное кольцо с единицей, A — градуированная ассоциативная \mathbf{k} -алгебра с единицей. Мы будем считать, что A связна, то есть $A_0 = \mathbf{k} \cdot 1$, и, следовательно, определена аугментация $\varepsilon : A \rightarrow \mathbf{k} \cong A_0$, $I(A) = \ker \varepsilon$ — аугментационный идеал. Бар-конструкцией алгебры A называется цепной комплекс вида

$$\cdots \rightarrow B^{-n}(A) \xrightarrow{d} B^{-n+1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow B^{-1}(A) \xrightarrow{d} B^0(A) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \rightarrow 0,$$

где $B^{-n}(A) = A \otimes_{\mathbf{k}} \underbrace{I(A) \otimes_{\mathbf{k}} \cdots \otimes_{\mathbf{k}} I(A)}_{n \text{ раз}}$.

Элементы $a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in B^{-n}(A)$ традиционно обозначаются как $a[a_1 | \dots | a_n]$. Дифференциалы задаются формулой

$$-d(a[a_1 | \dots | a_n]) = \bar{a}a_1[a_2 | \dots | a_n] + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{a}[\bar{a}_1 | \dots | \bar{a}_{i-1} | \bar{a}_i a_{i+1} | a_{i+2} | \dots | a_n],$$

где $\bar{a}_j = (-1)^{\deg a_j + 1}$. Известно, что бар-конструкция является проективной резольвентой \mathbf{k} как левого A -модуля.

После применения функтора $(\mathbf{k} \otimes_A -)$ к комплексу $(B(A), d)$ мы получим цепной комплекс $(\bar{B}(A), \bar{d})$, который называется *приведенной бар-конструкцией* кольца \mathbf{k} как левого A -модуля. Элементы приведенной бар-конструкции имеют вид $[a_1 | \dots | a_n] \in \bar{B}^{-n}(A)$, где $a_j \in I(A)$, а дифференциал \bar{d} задается формулой

$$-\bar{d}([a_1 | \dots | a_n]) = \sum_{j=1}^{n-1} [\bar{a}_1 | \dots | \bar{a}_{i-1} | \bar{a}_i a_{i+1} | a_{i+2} | \dots | a_n].$$

Гомологии данного комплекса позволяют вычислять функтор Tor:

$$\mathrm{Tor}_A^{-n}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = H^{-n}[\bar{B}(A), \bar{d}].$$

Далее в качестве алгебры A мы рассматриваем внешнюю алгебру Стенли–Райснера.

Определение 4.1. Внешней алгеброй Стенли–Райснера симплициального комплекса \mathcal{K} на множестве вершин $[m]$ называется факторалгебра следующего вида:

$$\Lambda[\mathcal{K}] = \Lambda[x_1, \dots, x_m] / \mathcal{I}_{SR},$$

где $\Lambda[x_1, \dots, x_m]$ — внешняя алгебра с m образующими, $\deg x_i = 1$, $i = 1, \dots, m$, $\mathcal{I}_{SR} = (x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}) \triangleleft \Lambda[x_1, \dots, x_m]$ — идеал Стенли–Райснера.

Внешняя алгебра Стенли–Райснера обладает $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировкой, которая определяется по правилу: если $X = x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k}$, то $\text{mdeg}(X) = (q_1, \dots, q_m)$, где $q_j = 1$, если $j \in \{i_1, \dots, i_k\}$ и $q_j = 0$ иначе. Полная степень элемента X полагается равной $\deg(X) = k$.

Рассмотрим приведенную бар-конструкцию $\overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}])$. Базис в $\overline{B}^{-n}(\Lambda[\mathcal{K}])$ составляют выражения вида $[X_1 | \dots | X_n]$, где X_i — некоторый моном в $\Lambda[\mathcal{K}]$, $i = 1, \dots, n$. Тем самым мы можем ввести $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ -градуировку в приведенной бар-конструкции, положив $\text{mdeg}([X_1 | \dots | X_n]) = \text{mdeg}(X_1) + \dots + \text{mdeg}(X_n)$.

Нетрудно видеть, что в мультиградуировке $\overbrace{(1, \dots, 1)}^{m \text{ штук}}$ дифференциал \bar{d} сохраняет произведения мономов $X_1 \cdot \dots \cdot X_n$. Следовательно, в приведенной бар-конструкции $(\overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}]), \bar{d})$ компонента $(\overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}]), \bar{d})_{(1, \dots, 1)}$ отделяется в качестве прямого слагаемого, и мы можем рассматривать \mathbf{k} -модуль $\text{Tot}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{(1, \dots, 1)}$. Далее компоненту $(\overline{B}(\Lambda[\mathcal{K}]), \bar{d})_{(1, \dots, 1)}$ мы обозначим за $(\tilde{B}(\mathcal{K}), \tilde{d})$.

Теорема 4.2. *Комплекс клеточных коцепей пространства $\text{Perm}(\mathcal{K})$ изоморфен однородной $(1, \dots, 1)$ -компоненте приведенной бар-конструкции внешней алгебры Стенли–Райснера, а именно:*

$$(C^p(\text{Perm}(\mathcal{K}); \mathbf{k}), d) \cong (\tilde{B}^{p-m}(\mathcal{K}), \tilde{d}).$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм \mathbf{k} -модулей

$$\varphi : C^*(\text{Perm}(\mathcal{K})) \rightarrow \tilde{B}^{*-m}(\mathcal{K}),$$

заданный на образующих по правилу $\varphi(U_1 | \dots | U_{m-p})^* = [X_1 | \dots | X_{m-p}]$, где $(U_1 | \dots | U_{m-p})^*$ — коцепь, отвечающая p -мерной грани $F^p = (U_1 | \dots | U_{m-p})$, $X_j = \prod_{i \in U_j} x_i$. Отображение φ является изоморфизмом \mathbf{k} -модулей, поскольку $\tilde{B}^{-n}(\mathcal{K}) = 0$ при $n > m$, а в остальных компонентах оно биективно на образующих.

Клеточный граничный гомоморфизм пермutoэдра был вычислен в работе [8]. Он имеет вид

$$\begin{aligned} & \partial(U_1 | \dots | U_{m-p}) = \\ & = \sum_{j=1}^{m-p} \sum_{M \subset U_j} (-1)^{m_1 + \dots + m_{j-1} + |M|} \text{shuf}(M; U_j \setminus M)(U_1 | \dots | U_{j-1} | M | U_j \setminus M | U_{j+1} | \dots | U_{m-p}), \end{aligned}$$

где $m_i = |U_i| - 1$, $\text{shuf}(M; U_j \setminus M)$ — знак перестановки, которая монотонно отправляет первые $|M|$ элементов множества U_j в элементы множества M , а остальные элементы отправляет в $U_j \setminus M$.

После дуализации получим, что дифференциал действует на коцепях как

$$d(U_1 | \dots | U_{m-p})^* = \sum_{j=1}^{m-p} (-1)^{m_1 + \dots + m_j + 1} \text{shuf}(U_j; U_{j+1})(U_1 | \dots | U_{j-1} | V_j | U_{j+2} | \dots | U_{m-p})^*,$$

где $V_j = U_j \cup U_{j+1}$ и предполагается, что его элементы упорядочены по возрастанию. Применив гомоморфизм φ , получим

$$\varphi(d(U_1 | \dots | U_{m-p})^*) = \sum_{j=1}^{m-p} (-1)^{m_1 + \dots + m_j + 1} \text{shuf}(U_j; U_{j+1})[X_1 | \dots | (-1)^{\varepsilon_j} X_j X_{j+1} | \dots | X_{m-p}],$$

где знак $(-1)^{\varepsilon_j}$ выбирается так, чтобы $(-1)^{\varepsilon_j} X_j X_{j+1} = \prod_{k \in V_j} x_k$. Заметим, что $\varepsilon_j = \text{shuf}(U_j; U_{j+1})$, а также $m_k = \deg X_k - 1$ и, следовательно, $\varphi(d(U_1 | \dots | U_{m-p})^*) = d(\varphi(U_1 | \dots | U_{m-p})^*)$. Тем самым мы показали, что φ — искомый изоморфизм цепных комплексов. \square

Следствие 4.3. *Для любого коммутативного кольца \mathbf{k} имеет место изоморфизм*

$$H^p(D(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \cong \text{Tor}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^{p-m}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{(1, \dots, 1)}.$$

5 Клеточная аппроксимация диагонали

Поскольку $\Lambda[\mathcal{K}]$ — градуированно коммутативная алгебра, в \mathbf{k} -модуле $\text{Tor}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ существует естественное градуированно коммутативное умножение, происходящее из бар-конструкции. Тем не менее, оно не сохраняет градуировку $(1, \dots, 1)$ и потому не может быть применено для описания умножения, существующего в алгебре $H^*(\text{Perm}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$, которая аддитивно изоморфна $\text{Tor}_{\Lambda[\mathcal{K}]}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{(1, \dots, 1)}$.

Умножение на клеточных коцепях $C^*(\text{Perm}(\mathcal{K}))$ можно ввести при помощи композиции отображений клеточных коцепных комплексов

$$C^*(\text{Perm}(\mathcal{K})) \otimes C^*(\text{Perm}(\mathcal{K})) \xrightarrow{\times} C^*(\text{Perm}(\mathcal{K}) \times \text{Perm}(\mathcal{K})) \xrightarrow{\tilde{\Delta}^*} C^*(\text{Perm}(\mathcal{K})).$$

В данной композиции \times — это стандартное \times -произведение клеточных коцепей, а $\tilde{\Delta}^*$ — отображение, индуцированное клеточной аппроксимацией $\tilde{\Delta} : \text{Perm}(\mathcal{K}) \rightarrow \text{Perm}(\mathcal{K}) \times \text{Perm}(\mathcal{K})$ диагонального отображения $\Delta : \text{Perm}(\mathcal{K}) \rightarrow \text{Perm}(\mathcal{K}) \times \text{Perm}(\mathcal{K})$, $\Delta(x) = (x, x)$.

Одна из таких клеточных аппроксимаций была построена в работе [10]. Далее мы приводим ее описание.

Определение 5.1. Матрица $O = (o_{i,j})$ размера $q \times p$ называется *упорядоченной*, если выполнены следующие условия:

- 1) $\{o_{i,j}\} = \{0, 1, \dots, q + p - 1\}$,
- 2) все строки и столбцы матрицы O ненулевые,
- 3) все ненулевые значения матрицы O попарно различны и расположены по возрастанию в каждой строке и каждом столбце.

Множество упорядоченных матриц размера $q \times p$ обозначим за $\mathcal{O}^{q \times p}$.

Каждой упорядоченной матрице O можно сопоставить два разбиения множества $[p + q - 1]$. Одно из них имеет вид $c(O) = (O_1 | \dots | O_q)$, где O_j — j -ый столбец матрицы O , а второе имеет вид $r(O) = (O^p | \dots | O^1)$, где O^i — i -ая строка матрицы O , причем предполагается, что из O_j, O^i удалили все нулевые элементы.

Определение 5.2. *Шаговой* матрицей E размера $q \times p$ называется упорядоченная матрица, удовлетворяющая условиям:

- 1) ненулевые значения в каждом столбце (строке) расположены в последовательных строках (столбцах),

- 2) главная диагональ матрицы E и все диагонали над и под ней содержат ровно один ненулевой элемент.

Множество шаговых матриц размера $q \times p$ обозначим за $\mathcal{E}^{q \times p}$.

Пример 5.3. Матрица $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ является шаговой. Соответствующие разбиения множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеют вид $c(E) = (14|25|3)$, $r(E) = (4|15|23)$.

Определение 5.4. Для $(i, j) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ введем операторы сдвига вниз $D_{i,j} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ и сдвига вправо $R_{i,j} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$, которые действуют на матрицу $O \in \mathcal{O}^{q \times p}$ следующим образом:

- 1) Если $o_{i,j} > 0$, $o_{i+1,j} = 0$, $o_{i+1,l} < o_{i,j}$ при $l < j$, и $o_{i+1,l} > o_{i,j}$ при условии $l > j$ и $o_{i+1,l} \neq 0$, а также существует элемент $o_{i,k} \neq 0$ для некоторого $k \neq i$, то $D_{i,j}O$ получается из O перестановкой элементов $o_{i,j}$ и $o_{i+1,j}$. В противном случае $D_{i,j}O = O$.
- 2) Если $o_{i,j} > 0$, $o_{i,j+1} = 0$, $o_{l,j+1} < o_{i,j}$ при $l < i$, и $o_{l,j+1} > o_{i,j}$ при условии $l > i$ и $o_{l,j+1} \neq 0$, а также существует элемент $o_{k,j} \neq 0$ для некоторого $k \neq j$, то $R_{i,j}O$ получается из O перестановкой элементов $o_{i,j}$ и $o_{i,j+1}$. В противном случае $R_{i,j}O = O$.

Пример 5.5. Пусть $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$R_{2,2}E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_{2,2}E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, D_{2,3}R_{2,2}E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определение 5.6. Матрица $F \in \mathcal{O}$ называется *конфигурационной*, если существует шаговая матрица E и набор операторов сдвига G_1, \dots, G_s таких, что

- 1) $F = G_s \dots G_1 E$,
- 2) если $G_s \dots G_1 = \dots D_{i_2, j_2} \dots D_{i_1, j_1} \dots$, то $i_1 \leq i_2$,
- 3) если $G_s \dots G_1 = \dots R_{i_2, j_2} \dots R_{i_1, j_1} \dots$, то $j_1 \leq j_2$.

В этом случае мы говорим, что матрица F получена из шаговой матрицы E . Множество конфигурационных матриц размера $q \times p$ обозначим за $\mathcal{C}^{q \times p}$.

Замечание. Все конфигурационные матрицы, которые могут быть получены из матрицы E Примера 5.3, описаны в Примере 5.5.

Для каждого m положим

$$\Delta([m]) = \sum_{q=1}^m \sum_{F \in \mathcal{C}^{q \times (m-q)}} \text{csgn}(F) c(F) \otimes r(F), \quad (4)$$

и продолжим Δ на остальные грани $(U_1 | \dots | U_p) = (U_1) \otimes (U_2) \otimes \dots \otimes (U_p)$ при помощи стандартного комультимпликативного продолжения, то есть $\Delta(U_1 | \dots | U_p) =$

$(\Delta(U_1)|\dots|\Delta(U_p))$. Знак $csgn(F)$ определяется следующим образом. Если матрица $F \in \mathcal{C}^{q \times p}$ получена из шаговой матрицы E , то

$$csgn(F) = (-1)^{\binom{q}{2}} rsgn(c(E)) \cdot sgn_1 r(F) \cdot sgn_2 c(E) \cdot sgn_2 c(F),$$

где $rsgn(U_1|\dots|U_p) = (-1)^{\frac{1}{2}(|U_1|^2+\dots+|U_p|^2-m)}$,

$$sgn_1(U_1|\dots|U_p) = (-1)^{\sum_{i=1}^{p-1} i \cdot |U_i|} sgn(U_1 \cup \dots \cup U_p),$$

$$sgn_2(U_1|\dots|U_p) = (-1)^{\binom{p-1}{2} + \sum_{i=1}^{p-1} i \cdot |U_i|} sgn(U_1 \cup \dots \cup U_p).$$

Отметим, что диагональ (4) построена комбинаторно, и в оригинальной работе [10] не доказано, что она является клеточной аппроксимацией. Однако в дальнейшем в препринте [5] было приведено доказательство того, что (4) в самом деле гомотопна стандартной диагонали.

Пример 5.7. Пусть $m = 2$. Тогда любая упорядоченная матрица 1×2 или 2×1 является шаговой, и мы получаем, что

$$\Delta(12) = (12) \otimes (2|1) + (1|2) \otimes (12).$$

В случае $m = 3$ значение $\Delta(123)$ вычислено явно в [10]. А именно:

$$\begin{aligned} \Delta(123) = & (1|2|3) \otimes (123) + (123) \otimes (3|2|1) - (1|23) \otimes (13|2) + (2|13) \otimes (23|1) - \\ & - (13|2) \otimes (3|12) + (12|3) \otimes (2|13) - (1|23) \otimes (3|12) + (12|3) \otimes (23|1). \end{aligned}$$

В случае граней большей размерности диагональ (4) устроена весьма сложно. Поэтому далее мы рассматриваем только симплициальные комплексы \mathcal{K} , являющиеся графами. Заметим, что в данном случае каждая грань комплекса $\text{Perm}(\mathcal{K})$ отвечает разбиению $(U_1|\dots|U_p)$, в котором $|U_j| \leq 2$ для всех $j = 1, \dots, p$.

Предложение 5.8. Пусть \mathcal{K} — граф на m вершинах. Тогда элементы из $C^p(\text{Perm}(\mathcal{K}))$, $p \geq 1$ мультипликативно порождаются элементами из $C^1(\text{Perm}(\mathcal{K}))$.

Доказательство. Мы будем доказывать данное утверждение индукцией по размерности $p = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. База индукции $p = 1$, очевидно, выполнена. Пусть теперь $F = (U_1|\dots|U_{m-p})$ — грань комплекса $\text{Perm}(\mathcal{K})$, $\dim F = p \geq 2$, U_{j_1}, \dots, U_{j_k} — все элементы разбиения, которые имеют мощность 2, $U_{j_i} = \{u_{j_i}^1, u_{j_i}^2\}$. Рассмотрим значение диагонали (4) на ней. Заметим, что оно содержит слагаемое вида

$$(U_1|\dots|U_{j_1}|\dots|u_{j_2}^1|u_{j_2}^2|\dots|u_{j_k}^1|u_{j_k}^2|\dots|U_{m-p}) \otimes (U_1|\dots|u_{j_1}^2|u_{j_1}^1|\dots|U_{j_2}|\dots|U_{j_k}|\dots|U_{m-p}).$$

Значит, после перехода к коцепям получим

$$\begin{aligned} (U_1|\dots|U_{j_1}|\dots|u_{j_2}^1|u_{j_2}^2|\dots|u_{j_k}^1|u_{j_k}^2|\dots|U_{m-p})^* \smile (U_1|\dots|u_{j_1}^2|u_{j_1}^1|\dots|U_{j_2}|\dots|U_{j_k}|\dots|U_{m-p})^* = \\ = (U_1|\dots|U_p)^*. \end{aligned}$$

При этом коцепь $(U_1|\dots|u_{j_1}^2|u_{j_1}^1|\dots|U_{j_2}|\dots|U_{j_k}|\dots|U_{m-p})^*$ имеет размерность на единицу меньше, чем у коцепи $(U_1|\dots|U_{m-p})^*$, и по предположению индукции порождается элементами $C^1(\text{Perm}(\mathcal{K}))$. Тем самым мы доказали индукционный переход. \square

Пример 5.9. Пусть \mathcal{K} — полный граф на четырех вершинах. Тогда 1-остов комплекса $\text{Perm}(\mathcal{K})$ совпадает с 1-остовом пермutoэдра Perm_4 , все двумерные грани в $\text{Perm}(\mathcal{K})$ имеют вид $(ab|cd)$, где $a < b, c < d$, а грани размерности $p \geq 3$ отсутствуют. Произведения нульмерных классов нетривиально только в случае

$$(a|b|c|d)^* \smile (a|b|c|d)^* = (a|b|c|d)^*.$$

Из Примера 5.7 следует, что нетривиальные произведения между элементами из $C^0(\text{Perm}(\mathcal{K}))$ и $C^1(\text{Perm}(\mathcal{K}))$ имеют вид

$$(ab|c|d)^* \smile (b|a|c|d)^* = (ab|c|d)^*, \quad (a|b|c|d)^* \smile (ab|c|d)^* = (ab|c|d)^*, \quad \text{где } a < b,$$

$$(a|bc|d)^* \smile (a|c|b|d)^* = (a|bc|d)^*, \quad (a|b|c|d)^* \smile (a|bc|d)^* = (a|bc|d)^*, \quad \text{где } b < c,$$

$$(a|b|cd)^* \smile (a|b|d|c)^* = (a|b|cd)^*, \quad (a|b|c|d)^* \smile (a|b|cd)^* = (a|b|cd)^*, \quad \text{где } c < d.$$

Вычислим диагональ на двумерных гранях:

$$\Delta(ab|cd) = (ab|cd) \otimes (b|a|d|c) + (ab|c|d) \otimes (b|a|cd) + (a|b|cd) \otimes (ab|d|c) + (a|b|c|d) \otimes (ab|cd).$$

Тогда все нетривиальные произведения между элементами из $C^1(\text{Perm}(\mathcal{K}))$ устроены следующим образом:

$$(ab|c|d)^* \smile (b|a|cd)^* = (ab|cd)^*, \quad (a|b|cd)^* \smile (ab|d|c)^* = (ab|cd)^*, \quad \text{где } a < b, c < d.$$

Произведения между элементами из $C^0(\text{Perm}(\mathcal{K}))$ и $C^2(\text{Perm}(\mathcal{K}))$ имеет вид

$$(ab|cd)^* \smile (b|a|d|c)^* = (ab|cd)^*, \quad (a|b|c|d)^* \smile (ab|cd)^* = (ab|cd)^*, \quad \text{где } a < b, c < d.$$

Тем самым мы полностью описали умножение в алгебре $C^*(\text{Perm}(\mathcal{K}))$ для данного графа \mathcal{K} .

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Кольцо когомологий группы крашенных кос*, Матем. заметки, 1969. Т. 5. С. 227–231.
- [2] Yu. Baryshnikov On the cohomology ring of no k -equal manifolds. *Preprint*, <https://publish.illinois.edu/ymb/files/2018/05/no3.pdf>, 1997.
- [3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра*, УМН, **55**:5 (2000), 3–106.
- [4] V. M. Buchtaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Math. Surv. and Monogr., 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [5] B. Delcroix-Oger, G. Laplante-Anfossi, V. Pilaud, K. Stoeckl, *Cellular diagonals of permutahedra*, preprint, arXiv:abs/2308.12119, 2023.
- [6] N. Dobrinskaya. Loops on polyhedral products and diagonal arrangements. *arXiv: Algebraic Topology*, 2009.
- [7] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2000.
- [8] R. J. Milgram, *Iterated loop spaces*, The Ann. of Math., 2nd Ser., **84**:3 (1966), 386–403.
- [9] I. Peeva, V. Reiner, V. Welker, *Cohomology of real diagonal subspace arrangements via resolutions*, Composito Math., **117**:1 (1999), 30–49.
- [10] S. Saneblidze, R. Umble, *Diagonals on the permutahedra, multiplihedra and associahedra.*, Homology, Homotopy and Applications, **6** (2004), 363–411.
- [11] C. Severs, J. A. White. On the homology of the real complement of the k -parabolic subspace arrangement. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 119(6):1336–1350, 2012.