Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Автоморфизмы рациональных комплексных момент-угол-многообразий

Курсовая работа студента 5 курса
Шенгелия Михаила Николаевича

Научный руководитель:

профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

Москва 2025

Содержание

1. Введение

Фактор-конструкция Батырева-Кокса позволяет представить торическое многообразие, заданное симплициальным веером Σ, в виде пространства орбит действия некоторой подгруппы G_Σ в алгебраическом торе $(\mathbb{C}^\times)^m$ на открытом подмножестве $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$ аффинного пространства $\mathbb{C}^m$. Согласно классическому результату Д. Кокса, для группы автоморфизмов V_Σ имеет место точная последовательность

$$1 \longrightarrow G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{N}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), G_\Sigma) \longrightarrow Aut(V_\Sigma) \longrightarrow 1. \tag{1.1}$$

О ней рассказывается подробнее в разделе 2 настоящей курсовой работы.

В разделе 3 описывается аналогичная конструкция, позволяющая по произвольному симплициальному вееру Σ (в векторном пространстве без фиксированной целочисленной решётки) с комбинаторикой $\mathcal{K}$ и подгруппе H в $(\mathbb{C}^\times)^m$, удовлетворяющей определённым свойствам, получать в качестве пространств орбит $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})/H$ комплексные многообразия, как топологические пространства представляющие собой момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. На этих многообразиях возникает слоение, называемое каноническим. Его свойствам посвящён раздел 4.

Для курсовой работы особенный интерес представляет частный случай вышеупомянутого построения, когда Σ является веером неособого полного торического многообразия. В этом случае каноническое слоение на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ замыкается в главное расслоение над соответствующим вееру Σ торическим многообразием V_Σ со слоем комплексный тор. В разделе 5 приведено рассуждение, которое позволяет через изучение этого расслоения описать связную компоненту единицы группы биголоморфных автоморфизмов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ в терминах точной последовательности

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \mathfrak{C}_{holom}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), H) \longrightarrow Aut^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \longrightarrow 1.$$

Раздел 6 посвящён описанию среднего члена этой последовательности. В последнем разделе приводятся примеры вычисления группы, аналогичной среднему члену последовательности (1).

2. Автоморфизмы полных торических многообразий

Пусть V_Σ – торическое многообразие с тором $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times \cong (\mathbb{C}^\times)^n$, заданное симплициальным веером Σ в $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ с примитивными векторами $a_1, \dots a_m \in N$ на лучах и подлежащим симплициальным комплексом

$$\mathcal{K} = \{I \subset \{1, \dots, m\} : Cone\langle a_i \rangle_{i \in I} \in \Sigma\}.$$

Определим открытое подмножество

$$U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$$

в $\mathbb{C}^m$ и подгруппу G_Σ в $(\mathbb{C}^\times)^m$:

$$G_\Sigma = Ker\left[(\mathbb{C}^\times)^m \xrightarrow{A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times} T_N\right], \text{ где } A : \mathbb{Z}^m \to N,\ e_i \mapsto a_i.$$

Теорема 2.1 (Конструкция Батырева-Кокса, [2], Theorem 2.1)**.** *Пусть $a_1, \dots, a_m$ линейно порождают $N_{\mathbb{R}}$, то есть V_Σ не имеет торических факторов. Тогда имеет место каконнический изоморфизм $V_\Sigma \cong U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/G_\Sigma$.*

Введём обозначения $\mathfrak{N}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), \cdot)$, $\mathfrak{C}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), \cdot)$ соответственно для нормализатора и централизатора подгруппы в группе регулярных алгебраических автоморфизмов $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$.

Теорема 2.2 ([2], Theorem 4.2). *Пусть Σ – полный. Тогда имеют место точные последовательности*

$$1 \longrightarrow G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{N}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), G_\Sigma) \longrightarrow Aut(V_\Sigma) \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow G_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{C}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), G_\Sigma) \longrightarrow Aut^0(V_\Sigma) \longrightarrow 1.$$

При этом $\mathfrak{C}(G_\Sigma)$ – связная аффинная алгебраическая группа, а $\mathfrak{N}(G_\Sigma)$ порождается $\mathfrak{C}(G_\Sigma)$ и $Aut(N,\Sigma)$, где $Aut(N,\Sigma)$ – группа автоморфизмов $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$, происходящих из преобразований решётки N, сохраняющих Σ.

Элемент группы $Aut(N,\Sigma)$ определяет перестановку лучей веера и таким образом вкладывается в конечную группу перестановок m элементов. Соответствующий автоморфизм $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$ переставляет координаты точки $z \in U_\mathbb{C}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$ согласно этой перестановке.

3. Комплексные структуры на момент-угол-комплексах

Пусть Σ – полный симплициальный веер в $V \cong \mathbb{R}^n$ (теперь не предполагаем в пространстве V фиксированной целочисленной решётки) с комбинаторикой, заданной симплициальным комплексом $\mathcal{K}$, и с отмеченными векторами $a_1, \dots a_m$ на лучах, линейно порождающими V. Обозначим $A : \mathbb{R}^m \to V$, $e_i \mapsto a_i$. Определим группу

$$R_\Sigma = exp(KerA) \subset (\mathbb{R}_>)^m \subset (\mathbb{C}^\times)^m,$$

где exp есть покоординатное взятие экспоненты. Отметим, что $R_\Sigma \cong \mathbb{R}^{m-n}$ как вещественная группа Ли. Здесь $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$ – то же, что в предыдущем разделе.

Теорема 3.1 ([4], Theorem 2.3). *Действие R_Σ на $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$ свободно и собственно. Пространство орбит $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})/R_\Sigma$ – гладкое вещественное многообразие размерности $m+n$, тор-эквивариантно гомеоморфное момент-угол-комплексу $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.*

Пусть теперь $m+n$ чётно. Положим $l = \frac{m-n}{2}$. Рассмотрев какое-нибудь комплексное подпространство в $\mathbb{C}^m$, при взятии вещественной части $\mathbb{C}^m \xrightarrow{Re} \mathbb{R}^m$ отображающееся биективно на $KerA$ (его удобно задать как образ $\mathbb{C}$-линейного вложения $\psi : \mathbb{C}^l \hookrightarrow \mathbb{C}^m$), и взяв от него покоординатную экспоненту, получим комплексную подгруппу Ли H в $(\mathbb{C}^\times)^m$.

Теорема 3.2 ([4], Theorem 3.3). *Группа H действует на $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$ свободно и собственно, и $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})/H$ – гладкое комплексное многообразие размерности $\frac{m+n}{2}$. Более того, $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})/H$ тор-эквивариантно диффеоморфно $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})/R_\Sigma \cong \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, и вводит, таким* *образом, на последнем комплексную структуру, в которой стандратное действие компактного тора T^m на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ голоморфно.*

Соотношения между определёнными выше группами удобно отобразить диаграммой. Из неё также ясно, что $H \cong \mathbb{C}^l$ как комплексная группа Ли.

$$\begin{tikzcd}
 & \psi(\mathbb{C}^l) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, phantom, "\cap" description] \arrow[ddd, bend right=70, "\wr"'] & KerA \arrow[d, phantom, "\cap" description] \arrow[ddd, bend left=70, "\wr"] \\
\mathbb{C}^l \arrow[r, hook, "\psi"] & \mathbb{C}^m \arrow[r, "Re"] \arrow[d, "exp"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "exp", "\wr"'] \\
 & (\mathbb{C}^\times)^m \arrow[r, "|\cdot|"] & (\mathbb{R}_>)^m \\
 & H \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r, "\sim"] & R_\Sigma \arrow[u, phantom, "\cup" description]
\end{tikzcd}$$

Обозначим $\mathfrak{h} \subset \mathbb{C}^m$ касательную алгебру к $H \subset (\mathbb{C}^\times)^m$. Пусть $x+iy \in \mathfrak{h}$. Из определяющих свойств семейства подгрупп H следует, что $x \in KerA$, а ввиду того, что $\mathfrak{h}$ замкнута относительно умножения на i, равенство $-y = Re(i(x+iy))$ влечёт $y \in KerA$. Таким образом, $\mathfrak{h} \subset KerA \oplus i\,KerA$.

Отметим, что выбор подгруппы H неоднозначен. Следующее замечание описывает семейство рассматриваемых подгрупп.

Замечание 3.3. *Группа H определяет на $KerA$ оператор комплексной структуры: $Jx = y \iff x + iy \in \mathfrak{h}$ (определение корректно, так как такой элемент y единственен). Наоборот, по комплексной структуре на $KerA$ восстанавливается группа: $\mathfrak{h} = \{x + iJx\}_{x \in KerA}$.*

4. Каноническое слоение

В постановке предыдущего раздела определим группу $G_\Sigma = exp(KerA^{\mathbb{C}}) \subset (\mathbb{C}^\times)^m$. Обозначим $\mathfrak{g}_\Sigma$ её касательную алгебру, $\mathfrak{g}_\Sigma = KerA \oplus i\,KerA$. Заметим, что при любом выборе $\mathfrak{h}$ выполнено включение $\mathfrak{g}_\Sigma \supset \mathfrak{h}$. Обозначим $F_\Sigma = G_\Sigma / H$.

Напомним, что комплексное момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ компактно. Классический результат (см. [1]) утверждает, что группа $Aut(M)$ биголоморфных автоморфизмов компактного комплексного многообразия M является комплексной группой Ли. Комплексная структура в касательной алгебре к $Aut(M)$ определяется следующим образом. Для касательного вектора ξ такого, что $\xi = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\ g(t)$, где $g(t)$ – однопараметрическая подгруппа в $Aut(M)$, обозначим X_ξ векторное поле на M, действующее на гладкие функции по формуле

$$X_\xi(x)f = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(g(t)x).$$

Элемент $J\xi$ касательной алгебры определим равенством

$$X_{J\xi}(x) = JX_\xi(x),$$

которое должно быть выполнено для всех точек $x \in M$. Здесь под J в правой части равенства имеется в виду комплексная структура в точке $x \in M$.

Конструкция 4.1. *Пусть M – компактное комплексное многообразие, T – какой-нибудь максимальный компактный тор в $Aut^0(M)$ как вещественной группе Ли. Обозначим его касательную алгебру $\mathfrak{t}$. Рассмотрим комплексную подалгебру $\mathfrak{t} \cap J\mathfrak{t}$ в касательной алгебре к $Aut^0(M)$. Обозначим $F = exp(\mathfrak{t} \cap J\mathfrak{t}) \subset T$. Отметим, что она не обязана быть замкнутой.*

Лемма 4.2 ([3], Lemma 2.1)**.** *Группа F не зависит от выбора максимального тора T, нормализуется всеми биголоморфными автоморфизмами M и централизуется компонентой связности единицы $Aut^0(M)$.*

Предложение 4.3. *Для комплексного момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ определённая описанным выше образом группа F совпадает с F_Σ.*

Доказательство. Группа автоморфизмов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ содержит образ $(\mathbb{C}^\times)^m$, полученный спуском его действия с $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$. Рассмотрим отображение

$$p : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m/\mathfrak{h}$$

между касательными алгебрами к $(\mathbb{C}^\times)^m \subset Aut^0(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}))$ и $(\mathbb{C}^\times)^m/H \subset Aut^0(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ соответственно.

Разложим $\mathbb{C}^m$ в сумму

$$\mathbb{C}^m = \underbrace{\mathfrak{t}^m}_{Im} \oplus \underbrace{i\,\mathfrak{t}^m}_{Re},$$

где $\mathfrak{t}^m$ – касательная алгебра к компактному тору $T^m \subset (\mathbb{C}^\times)^m$. Так как H есть группа глобальных стабилизаторов действия $(\mathbb{C}^\times)^m$ на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, её касательная алгебра может быть задана следующим образом

$$\mathfrak{h} = \{\xi + i\eta, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{t}^m : \; X_\xi + JX_\eta = 0\} \subset \mathbb{C}^m. \tag{4.1}$$

Из определения F следует, что её касательная алгебра задаётся как

$$\mathfrak{f} = \{\xi \in p(\mathfrak{t}^m) : \exists\, \eta \in p(\mathfrak{t}^m) \text{ такой, что } X_\eta = JX_\xi \;\} \subset \mathbb{C}^m/\mathfrak{h} \tag{4.2}$$

(обратим внимание, что $p(\mathfrak{t}^m) \cong \mathfrak{t}^m$ – касательная алгебра к стандартному максимальному тору, действующему на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$).
Комбинируя (4.1) и (4.2), заключаем, что $p(Im\,\mathfrak{h}) = \mathfrak{f}$.
Так как $\mathfrak{h}$ – комплексное подпространство, имеем $Im\,\mathfrak{h} = i\,Re\,\mathfrak{h} = i\,KerA$. Наконец, из разложения

$$\mathfrak{g}_\Sigma = \mathfrak{h} \oplus i\,KerA,$$

заключаем, что $p(\mathfrak{g}_\Sigma) = \mathfrak{f}$, то есть $\mathfrak{f}_\Sigma = \mathfrak{g}_\Sigma/\mathfrak{h} = \mathfrak{f}$. □

Нетрудно заметить, что группа F_Σ действует на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ с конечными стабилизаторами. Слоение $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ на орбиты действия F_Σ называется *каноническим слоением.*

5. Компонента единицы группы автоморфизмов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$

Назовём веер Σ с заданным выбором векторов на лучах *рациональным*, если группа $N = \mathbb{Z}\langle a_1, \dots a_m\rangle$ дискретна в V. Пусть веер Σ рационален и векторы на его лучах примитивны в решётке N. В этом случае веер Σ задаёт торическое многообразие V_Σ. Потребуем также, чтобы V_Σ было неособым (это переформулируется как условие на веер).
В данной постановке группа G_Σ, определённая как в разделе 2, не имеет кручения и совпадает с $exp(KerA^\mathbb{C})$, и $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ представляет собой тотальное пространство главного F_Σ-расслоения над V_Σ. Его слой – группа $F_\Sigma = G_\Sigma/H$ оказывается при этом компексным (компактным) тором комплексной размерности $l = \frac{m-n}{2}$.

Теорема 5.1 (Г. Тароян)**.** *Имеет место точная последовательность*

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \mathfrak{C}_{holom}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), H) \longrightarrow Aut^0(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \longrightarrow 1,$$

причём $\mathfrak{C}_{holom}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), H)$ – централизатор H в группе биголоморфных автоморфизмов $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$, совпадает с $\mathfrak{C}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), G_\Sigma) \subset Aut_{alg}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K})) \subset Aut_{holom}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}))$.

Замечание 5.2. *Утверждения о централизаторе (Предложения 6.1 и 6.6, Замечание 6.4) будут даны в следующем разделе.*

Доказательство.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\varphi} \circlearrowright U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) \arrow[dd, "/G_\Sigma"'] \arrow[dr, "/H"] & \\
& \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \circlearrowleft \varphi,\ \pi^H\widetilde{\varphi} \arrow[dl, "/F_\Sigma"] \\
\pi^F\varphi \circlearrowright V_\Sigma &
\end{tikzcd}$$

Определим гомоморфизм

$$\pi^H : \mathfrak{C}_{holom}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), H) \longrightarrow Aut^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \subset Aut(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$$

как спуск автоморфизмов, переставляющих орбиты действия группы H, на пространство орбит (вообще говоря, спуск возможен в точности для автоморфизмов, нормализующих подгруппу H). Так как ввиду Предложения 6.6 $\mathfrak{C}_{holom}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), H) = \mathfrak{C}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G)$ – связная группа Ли (см. Теорему 2.2), образ π^H содержится в компоненте единицы.

Далее, из Леммы 4.2 и Предложения 4.3 следует, что всякий автоморфизм $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ спускается до биголоморфного автоморфизма V_Σ. Так как V_Σ полно, пользуясь классическим утверждением ([5], Proposition 15) заключаем, что этот автоморфизм должен быть алгебраическим. Таким образом, имеем гомоморфизм

$$\pi^F : Aut^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \longrightarrow Aut^0(V_\Sigma).$$

Наконец, из Теоремы 2.2 следует, что гомоморфизм

$$\pi^G : \mathfrak{C}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma) \twoheadrightarrow Aut^0(V_\Sigma)$$

сюръективен.

Докажем сюръективность гомоморфизма π^H. Пусть $\varphi \in Aut^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. Спустим его до $\pi^F \in Aut^0(V_\Sigma)$, который затем поднимем каким-нибудь образом до $\widetilde{\varphi} \in \mathfrak{C}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$. Так как, очевидно, $\mathfrak{C}(G_\Sigma) \subset \mathfrak{C}_{holom}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), H)$ (более того, по Предложению 6.6 имеет место равенство), $\widetilde{\varphi}$ спускается до $\pi^H\widetilde{\varphi} \in Aut^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. Рассмотрим $\theta = \pi^H\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \in Aut^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. Так как $\pi^F\theta = id \in Aut(V_\Sigma)$ и, по Лемме 4.2 автоморфизмы из $Aut^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ коммутируют с действием F_Σ, θ действует в расслоении $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ над V_Σ послойно и, более того, является (эквивариантным) автоморфизмом главного F_Σ-расслоения.

Лемма 5.3. *Всякий автоморфизм θ главного F_Σ-расслоения $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to V_\Sigma$ даётся действием одного и того же элемента $f \in F_\Sigma$ в слоях.*

Доказательство. Так как θ коммутирует с действием F_Σ, в каждом слое он представляет собой умножение на элемент тора. Сопоставив каждой точке x базы V_Σ элемент тора, на который производится сдвиг в слое над x, получим корректно определённое голоморфное отображение $f : V_\Sigma \to F_\Sigma$. Ввиду того, что $\pi_1(V_\Sigma) = \{1\}$ как фундаментальная группа полного гладкого торического многообразия, существует голоморфное поднятие $\widetilde{f} : V_\Sigma \to \mathbb{C}^l$. Компактность V_Σ обязует $\widetilde{f}$ быть тождественным отображением. $\square$

Таким образом, $\theta \in F_\Sigma \subset Aut^0(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Следовательно, выбором $g \in G_\Sigma$ мы можем добиться того, чтобы $g \circ \widetilde{\varphi}$ отображалось в точности в ϕ под действием π^H. Сюръективность доказана.

Пусть теперь $\psi \in \mathfrak{C}_{holom}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), H) = \mathfrak{C}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), G)$ спускается до $id \in Aut^0(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ под действием π^H. Тогда $\pi^G\psi = id \in Aut(V_\Sigma)$. Из Теоремы 2.2 следует, что ψ есть элемент группы G_Σ. Так так ограничение π^H на G_Σ есть проекция $G_\Sigma \to G_\Sigma/H$, и $\pi^H\psi = id$, заключаем, что $\psi \in H$. $\square$

6. Централизатор и нормализатор H

Предложение 6.1 ([6], Proposition 4.1.1, Proposition 4.2.1)**.** *Пусть Σ – полный веер (необязательно рациональный). В этом случае нормализаторы групп G_Σ, R_Σ, H в группе биголоморфных автоморфизмов $\mathbb{C}^m$ состоят только из полиномиальных преобразований.*

Далее будем считать, что веер Σ рационален. Под G_Σ будем понимать $exp(KerA^\mathbb{C})$ – замкнутый подтор в $(\mathbb{C}^\times)^m$.

Предложение 6.2. *Для рационального веера ограничение $\mathfrak{X}(G_\Sigma) \to \mathfrak{X}(H)$ характеров с G на H инъективно.*

Доказательство. Всякий характер G_Σ имеет вид

$$\chi(t_1, \ldots, t_m) = t_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot t_m^{d_m}, \quad \text{где } d_1, \ldots d_m \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\chi|_H = 1$. Отсюда, в частности, следует, что $|t_1|^{d_1} \cdot \ldots |t_m|^{d_m} = 1$ для любого $(t_1, \ldots, t_m) \in H$. Так как при взятии модуля H отображается сюръективно (более того, биективно) на R_Σ, имеем

$$y_1^{d_1} \cdot \ldots y_m^{d_m} = 1 \quad \text{для всех } (y_1, \ldots, y_m) \in R_\Sigma.$$

Но $R_\Sigma \subset G_\Sigma$ – вещественная форма. Голоморфный характер комплексной группы Ли, ограничивающийся единицей на её вещественную форму, обязан быть единицей на всей группе. $\square$

Следствие 6.3. *Для рационального Σ подгруппа H плотна по Зарискому в G_Σ.*

Доказательство. Пусть не так. Как известно из теории алгебраических групп, замыкание $\overline{H}$ подгруппы H по Зарискому будет (замкнутой) подгруппой в G_Σ. Значит, $\overline{H}$ является собственным подтором в алгебраическом торе G_Σ и высечено в нём приравниванием какого-то множества мономов к единице. Отсюда видим, что существует неединичный характер G, равный тождественно 1 на H. Противоречие с Предложением 6.2. $\square$

Пусть теперь Σ рационален и симплициален.

Замечание 6.4. *Так как $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ аффинно и дополнение к нему в $\mathbb{C}^m$ имеет коразмерность хотя бы два, всякий регулярный автоморфизм $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ продолжается до регулярного автоморфизма $\mathbb{C}^m$.*

Имея в виду Предложение 6.1 и Замечание 6.4, будем рассматривать только алгебраические автоморфизмы $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$. Из замечания следует, что элемент $\varphi \in Aut(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}))$ можно (контравариантно) отождествить с автоморфизмом φ^* алгебры многочленов

$$S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m].$$

Всякая подгруппа $G \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ даёт градуировку на S группой своих характеров:

$$S_{G,\chi} = \{f \in S : f(t \cdot x) = \chi(t) f(x) \text{ для всех } t \in G,\ x \in \mathbb{C}^m\}$$

для $\chi \in \mathfrak{X}(G) = Hom_{holom}(G, \mathbb{C}^\times)$.

Замечание 6.5. *Нетрудно видеть, что*

$$\varphi \in \mathfrak{C}(\mathbb{C}^m, G) \iff \varphi^*(S_{G,\chi}) = S_{G,\chi} \ \textit{для всех}\ \chi \in \mathfrak{X}(G).$$

Предложение 6.6. *Пусть Σ рационален. Тогда $\mathfrak{C}(\mathbb{C}^m, H)$ совпадает с $\mathfrak{C}(\mathbb{C}^m, G_\Sigma)$. Как следствие, в постановке выше $\mathfrak{C}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), H) = \mathfrak{C}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$.*

Доказательство. Включение справа налево очевидно. Покажем включение в обратную сторону. Пусть $\chi \in \mathfrak{X}(G_\Sigma)$. Ясно, что $S_{G,\chi} \subset S_{H,\chi|_H}$ и, более того,

$$S_{H,\chi'} = \bigoplus_{\substack{\chi \in \mathfrak{X}: \\ \chi|_H = \chi'}} S_{G,\chi}$$

Но ввиду Предложения 6.2 для любого $\chi' \in \mathfrak{X}(H)$ в сумме выше не более одного слагаемого. Это означает, что сохранение автоморфизмом φ^* градуировки группой $\mathfrak{X}(H)$ влечёт сохранение градуировки группой $\mathfrak{X}(G_\Sigma)$. Остаётся применить предыдущее замечание. Наблюдение, что $\mathfrak{C}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), \cdot) \subset \mathfrak{C}(\mathbb{C}^m, \cdot)$ выделяется дополнительным требованием инвариантности подмножества $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$, завершает доказательство. $\square$

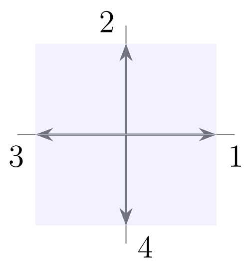
Предложение 6.7. *Пусть* Σ *рационален. Тогда* $\mathfrak{N}(\mathbb{C}^m, H) \subset \mathfrak{N}(\mathbb{C}^m, G_\Sigma)$. *Кроме того, в постановке выше* $\mathfrak{N}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), H) \subset \mathfrak{N}(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$.

Доказательство. Известно, что группа $Aut(\mathbb{C}^m)$ имеет фильтрацию алгебраическими подгруппами $Aut(\mathbb{C}^m)_{\leq d}$ полиномиальных автоморфизмов степени не выше d. Для рационального Σ группа G_Σ есть алгебраическая подгруппа в $(\mathbb{C}^\times)^m = Aut(\mathbb{C}^m))_{\leq 0}$. Рассмотрим $\varphi \in Aut(\mathbb{C}^m)$ и отображение сопряжения $\iota_\varphi : Aut(\mathbb{C}^m) \to Aut(\mathbb{C}^m)$, $\psi \mapsto \varphi\psi\varphi^{-1}$. Оно отображает $(\mathbb{C}^\times)^m$ в алгебраическое многообразие $Aut(\mathbb{C}^m)_{\leq d}$, где $d = deg(\varphi) \cdot deg(\varphi^{-1})$ и непрерывно в топологии Зариского. Если при этом $\varphi \in \mathfrak{N}(\mathbb{C}^m, H)$, то $\iota_\varphi(H) = H$, а так как $G_\Sigma = \overline{H} \subset (\mathbb{C}^\times)^m$, $\iota_\varphi(G_\Sigma) = G_\Sigma$ в $Aut(\mathbb{C}^m)_{\leq d}$. Таким же образом можно доказать Предложение 6.6. $\square$

7. Сравнение нормализаторов H и G_Σ

В этом разделе Σ – сиплициальный веер полного торического многообразия. По Предложению 6.7, $\mathfrak{N}(H) \subset \mathfrak{N}(G_\Sigma)$. Следующйи пример демонстрирует, что обратное включение, вообще говоря, неверно.

Пример 7.1. Рассмотрим веер Σ торического многообразия $V_\Sigma = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Комбинторика Σ даётся симплициальным комплексом $\mathcal{K}$, представляющим собой границу квадрата.



По Σ строится гладкое вещественное многообразие, гомеоморфное $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong S^3 \times S^3$. Ядро оператора $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$KerA = \{(x, y, x, y)\}_{x,y \in \mathbb{R}}$$

Группу H_α зададим $\mathbb{C}$-линейным вложением

$$\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^4, \quad z \mapsto (z, \alpha z, z, \alpha z),$$

где параметр $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Из Теоремы 2.2 следует, что

$$\mathfrak{N}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma) = \mathfrak{C}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma) \rtimes (\varphi_\sigma)_2,$$

где $(\varphi_\sigma)_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ – группа, порождённая автоморфизмом, происходящим из перестановки лучей $\sigma = (12)(34)$, которая реализуется оператором

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Автоморфизм $\varphi_\sigma : U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^4$ имеет вид

$$\varphi_\sigma : \ (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_2, z_1, z_4, z_3).$$

Сопряжение этим автоморфизмом элемента группы H_α переставляет таким же образом координаты этого элемента в $(\mathbb{C}^\times)^4$, и мы получаем

$$\varphi_\sigma H_\alpha \varphi_\sigma^{-1} = \{(\alpha z, z, \alpha z, z)\}_{z \in \mathbb{C}^\times} = \left\{(z, \alpha^{-1} z, z, \alpha^{-1} z)\right\}_{z \in \mathbb{C}^\times} = H_{\alpha^{-1}} \neq H_\alpha.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{N}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), H)$ строго меньше $\mathfrak{N}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$ и равен $\mathfrak{C}(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$.

Далее будут предложены инструменты, позволяющие выработать более общий подход к описанию нормализаторов групп H.

Конструкция 7.2 (Двойственность Гейла)**.** *Пусть примитивные векторы веера Σ линейно порождают $N_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим точную последовательность*

$$0 \to KerA \longrightarrow \mathbb{Z}^m \xrightarrow{A} N.$$

Двойственная ей последовательность точна и имеет вид

$$0 \to M \xrightarrow{A^*} \mathbb{Z}^m = \bigoplus_{\rho \in \Sigma(1)} \mathbb{Z} D_\rho \xrightarrow{\Gamma} Cl(V_\Sigma) \to 0.$$

Здесь M – решётка характеров, Γ сопоставляет тор-инвариантному дивизору Вейля его класс. Конфигурация векторов $\gamma_i = \Gamma(D_i)$ – двойственная по Гейлу к конфигурации A.

Напомним, что выбор группы H эквивалентен введению на $KerA$ оператора комплексной структуры (см. Замечание 3.3).

Лемма 7.3. *Автоморфизм $\varphi_\sigma \in Aut(N, \Sigma) \subset Aut(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}))$ нормализует действие группы H тогда и только тогда, когда*

$$J^* \, Q_\sigma = Q_\sigma \, J^*,$$

где $Q_\sigma \in GL(Cl(V_\Sigma)_{\mathbb{R}})$ – оператор, переставляющий классы дивизоров D_i согласно перестановке σ, а J^* – комплексная структура на $Cl(V_\Sigma)_{\mathbb{R}}$, двойственная к комплексной структуре J на $KerA$.

Доказательство. Правый квадрат диаграммы слева означает, что перестановка лучей σ действительно реализуется каким-то оператором P_σ на решётке (это необходимое условие для существования автоморфизма φ_σ). Рассмотрев двойственную диаграмму, мы получаем на $Cl(V_\Sigma)$ оператор, двойственный к $\sigma|_{KerA}$, и переставляющий классы дивизоров D_i перестановкой σ^{-1}.

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to KerA & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{A} & N \\ \sigma|_{KerA}\big\downarrow & & \sigma\big\downarrow & & \big\downarrow P_\sigma \\ 0 \to KerA & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m & \xrightarrow[A]{} & N \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 \to M & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m & \xrightarrow{\Gamma} & Cl(V_\Sigma) \to 0 \\ \big\uparrow & & \sigma^{-1}\big\uparrow & & \big\uparrow Q_{\sigma^{-1}} \\ 0 \to M & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m & \xrightarrow[\Gamma]{} & Cl(V_\Sigma) \to 0 \end{array}$$

Так как $\mathfrak{h}$ взятием экспоненты отображается на H биективно, нормализация элементом φ_σ группы H эквивалентна сохранению $\mathfrak{h}$ при присоединённом представлении, которое имеет вид

$$Ad_{\varphi_\sigma}(x + iJx) = \sigma(x) + i\sigma(Jx),$$

где под $\sigma(x)$ имеется в виду вектор $\left(x_{\sigma(i)}\right)_i$. Но в $\mathfrak{h}$ над $\sigma(x) \in KerA$ висит элемент $\sigma(x) + iJ\sigma(x)$, и значит,

$$\varphi_\sigma H \varphi_\sigma^{-1} = H \iff \sigma|_{KerA} \, J = J \, \sigma|_{KerA}.$$

Доказательство завершается рассмотрением равенства двойственных операторов.

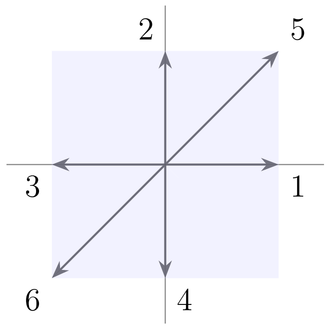
□

Пример 7.4. Применим Лемму 7.3 к предыдущему примеру. Группа классов V_Σ имеет вид $Cl(V_\Sigma) = \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_2$, где γ_i – класс дивизора $[D_i]$. При этом $\gamma_3 = \gamma_1$, $\gamma_2 = \gamma_4$. Таким образом, оператор Q_σ должен реализовывать перестановку $\tau = (12)$ базисных классов γ_1, γ_2 и потому в этом базисе имеет вид

$$Q_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что на $Cl(V_\Sigma)_\mathbb{R}$ не существует оператора комплексной структуры, который коммутировал бы с Q_σ.

Пример 7.5. Пусть Σ – веер раздутия $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в двух из четырёх точек, неподвижных относительно действия тора.



Рассмотрим перестановку $\sigma = (13)(24)(56)$, реализуемую оператором

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае также можно выбрать базис, на который перестановка ограничивается: например, $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_2, \gamma_4$. В этом базисе оператор Q_σ будет иметь вид

$$Q_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Его собственные подпространства имеют вид

$$V_1 = \mathbb{R}\langle \gamma_1 + \gamma_3, \gamma_2 + \gamma_4 \rangle,$$

$$V_{-1} = \mathbb{R}\langle \gamma_1 - \gamma_3, \gamma_2 - \gamma_4 \rangle.$$

Комплексная структура J^* на $Cl(V_\Sigma)_\mathbb{R}$ коммутирует с Q_σ тогда и только тогда, когда она раскладывается в сумму комплексных структур на двумерных пространствах

V_1, V_{-1}. Таким образом, из множества комплексных структур на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ выделяются те, в которых преобразование, переставляющее координаты согласно перестановке σ, голоморфно.

Список литературы

[1] Bochner S., Montgomery D., Locally compact groups of differentiable transformations, Ann. of Math. (2) 47 (1946), 639–653.

[2] D. Cox. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety.* J. Algebraic Geom 4 (1995), 15-50.

[3] Ishida, H., Kasuya, H. *Transverse Kähler structures on central foliations of complex manifolds*. Annali di Matematica 198 (2019), 61–81.

[4] Taras Panov, Yuri Ustinovsky, *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds*, Mosc. Math. J., 12:1 (2012), 149–172.

[5] Serre, Jean-Pierre. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Annales de l'Institut Fourier, Volume 6 (1956), 1-42.

[6] Gregory Taroyan. *Equivariant automorphisms of the Cox construction and applications.* arXiv:2403.02465.