Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Фактор-конструкция момент-угол-многообразий

Курсовая работа студента 4 курса
Шенгелия Михаила Николаевича
Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

Москва 2024

Содержание

1. Введение

Хорошо известна конструкция Батырева-Кокса, позволяющая представлять торическое многообразие V_Σ как фактор открытого подмножества $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$ в аффинном пространстве по действию некоторой группы G_Σ. Эта конструкция оказывается особенно полезна при вычислении групп регулярных автоморфизмов полных симплициальных торических многообразий.

Аналогичная конструкция имеет место и для важного объекта изучения торической топологии – момент-угол-комплексов. Будучи представленными как пространство орбит некоторого действия на $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$, они обретают структуру гладкого, а затем, хоть и неоднозначно, – комплексного многообразия. При этом замечательно, что исходным данным для введения гладкой структуры оказывается (возможно, иррациональный) веер. При данном построении на момент-угол-многообразии возникает слоение, которое при условии рациональности веера превращается в расслоение над торическим многообразием, задаваемым тем же веером. Таким образом момент-угол-многообразие со слоением можно понимать как „некоммутативную модель" торического многообразия.

Аналогия с торическими многообразиями может представлять интерес для изучения геометрических свойств момент-угол-многообразий и описания их групп автоморфизмов. Цель настоящей курсовой работы – отобразить основные конструкции и существующие продвижения в этом направлении.

2. Случай торических многообразий

Пусть $T = (\mathbb{C}^\times)^n$ – алгебраический тор, $M = Hom(T, \mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}^n$ – решётка его характеров, $N = M^\vee$ – двойственная решётка. Пусть, далее, Σ – веер в $N_\mathbb{R} = N \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$, множество его лучей обозначим $\Sigma(1)$. Обозначим $\{a_\rho\}_{\rho\in\Sigma(1)}$ минимальные образующие на лучах и потребуем, чтобы a_ρ линейно порождали $N_\mathbb{R}$.

Обозначим V_Σ торическое многообразие, задаваемое веером Σ. На нём действует алгебраический тор T. Каждому лучу $\rho \in \Sigma(1)$ соответствует T–инвариантный дивизор D_ρ на V_Σ. Для группы классов дивизоров Вейля $Cl(V_\Sigma)$ имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Div_T(V_\Sigma) \longrightarrow Cl(V_\Sigma) \longrightarrow 0,$$

где $Div_T(V_\Sigma) = \oplus_{\rho\in\Sigma(1)}\mathbb{Z}D_\rho$ – группа тор–инвариантных дивизоров Вейля на V_Σ, а отображение из решётки M сопоставляет характеру его дивизор: $m \mapsto \sum\langle m, a_\rho\rangle D_\rho$.

Обозначим $G_\Sigma = Hom(Cl(V_\Sigma), \mathbb{C}^\times)$. Из последовательности, двойственной к последовательности выше, видно, что группа G вкладывается в алгебраический тор $Hom(Div_T(V_\Sigma), \mathbb{C}^\times) \cong (\mathbb{C}^\times)^{\Sigma(1)}$ как замкнутая подгруппа, заданная следующими соотношениями:

$$G_\Sigma = \{(t_\rho)_{\rho\in\Sigma(1)} \in (\mathbb{C}^\times)^{\Sigma(1)} \prod_{\rho\in\Sigma(1)} t_\rho^{\langle m,a_\rho\rangle} = 1 \text{ для всех } m \in M\},$$

которые сводятся к конечному числу посредством выбора базиса в M. Группа G_Σ действует умножениями на аффинном пространстве $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$. Его координатную алгебру обозначим $S = \mathbb{C}[x_\rho : \rho \in \Sigma(1)]$, где каждому лучу ρ сопоставлена переменная x_ρ. Положим $B = \langle x^{\hat\sigma} : \sigma \in \Sigma\rangle \subset S$, где $\hat\sigma$ – дополнение к множеству лучей, содержащихся в конусе σ веера Σ. Дополнение к замкнутому подмножеству в $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$, соответствующему идеалу B, обозначим U_Σ. Отметим, что для построения U_Σ достаточно знать только комбинаторику веера Σ.

Наконец, введём градуировку группой $Cl(V_\Sigma)$ на переменных: $deg(x_\rho) = [D_\rho] \in Cl(V_\Sigma)$ и продолжим её на мономы. Полученная градуированная алгебра $\mathcal{R}_\Sigma = \bigoplus_{\alpha\in Cl(V_\Sigma)} (\mathcal{R}_\Sigma)_\alpha$ называется *кольцом однородных координат* на V_Σ. Известно, что $(\mathcal{R}_\Sigma)_\alpha \cong H^0(V_\Sigma, \mathcal{O}_{V_\Sigma}(D))$, где $[D] = \alpha \in Cl(V_\Sigma)$, а само кольцо $\mathcal{R}_\Sigma$ изоморфно *кольцу Кокса* многообразия V_Σ. Отметим, что кольцо однородных координат определяется не всем веером, а только его лучами.

Автоморфизмы полных торических многообразий

Теорема 1 ([1], Theorem 2.1). *Пусть V_Σ – торическое многообразие, заданное симплициальным веером Σ. Тогда категорный фактор U_Σ по действию группы G является геометрическим (то есть его точки соответствуют орбитам действия группы, причём все орбиты замкнуты) и естественно изоморфен многообразию V_Σ.*

Далее, имея в виду, что комбинаторика симплициального веера Σ задаётся симплициальным комплексом $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma = \{I \subset \Sigma(1) : \text{ конус } \mathbb{R}_\geq\langle a_\rho : \rho \in I\rangle \text{ лежит в } \Sigma\}$, будем использовать обозначение $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$ вместо U_Σ.

Обозначим $Aut(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$ подгруппу регулярных алгебраических автоморфизмов $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$, нормализующих действите группы G_Σ, и как следствие, переставляющих орбиты этого действия между собой. Введём также обозначение $Aut^0(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$ для подгруппы автоморфизмов, коммутирующих с действием группы. Ясно, что $Aut^0(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma) \subset Aut(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$. Отметим, что корректно определён гомоморфизм $\pi_*^G : Aut(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma) \to Aut(V_\Sigma)$.

Теорема 2 ([1], Theorem 4.2)**.** *Пусть V_Σ – полное торическое многообразие, заданное симплициальным веером Σ с подлежащим симплициальным комплексом $\mathcal{K}$. Тогда имеет место следующая точная последовательность:*

$$1 \longrightarrow G_\Sigma \longrightarrow Aut(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma) \xrightarrow{\pi_*^G} Aut(V_\Sigma) \longrightarrow 1,$$

причём $Aut(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$ является алгебраической группой, а её подгруппа $Aut^0(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$ есть компонента связности единицы. Кроме того, $Aut^0(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_\Sigma)$ канонически изоморфна группе $Aut_g(\mathcal{R}_\Sigma)$ градурованных изоморфизмов алгебры $\mathcal{R}_\Sigma$.

3. Комплексные момент-угол-многообразия

Момент-угол-комплекс

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $S = [m] = \{1, 2, \dots, m\}$
Рассмотрим $m-$мерный полидиск:

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i| \leq 1 \text{ для всех } i = 1, \dots, m\},$$

Момент-угол-комплекс, соответствующий симплициальному комлпексу $\mathcal{K}$, определяется следующим образом:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{D} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{S} \right) = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{D}^m : \{i : |z_i| < 1\} \in \mathcal{K}\} \subset \mathbb{D}^m,$$

где $\mathbb{S}$ – граница диска $\mathbb{D}$. Отметим, что на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ действует покоординатным умножением компактный тор $T^m = \mathbb{S}^m$.
Аналогично определим открытое подмногообразие $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{C}^m$:

$$U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{C} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{C}^\times \right) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\} \subset \mathbb{C}^m.$$

Нетрудно понять, что описанной конструкцией мы получили в точности многообразие $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ из введения. Отметим, что $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ есть торическое многообразие, соответствующее вееру

$$\Sigma_{\mathcal{K}} = \{\mathbb{R}_{\geq}\langle e_i : i \in I\rangle : I \in \mathcal{K}\},$$

где e_i обозначает i-й стандартный базисный вектор в $\mathbb{R}^m$. Для дальнейших конструкций нам потребуются *иррациональные вееры.*

Соглашения о веерах

Мы будем иметь дело с симплициальными веерами. Симплициальный веер Σ в векторном пространстве V определяется симплициальным комплексом $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ на множестве его лучей S. *Калиброванным симплициальным веером* назовём четвёрку $\{S, \mathcal{K}, V, \rho\}$, где $\rho : S \to V$ – собственно калибровка – отображение, сопоставляющее лучу веера ненулевой вектор, лежащий на этом луче. Далее говоря „веер", будем подразумевать наличие калибровки.

Калиброванный веер $\{S, \mathcal{K}, V, \rho\}$ будем называть рациональным, если абелева группа $\mathbb{Z}\langle\rho(s) : s \in S\rangle \subset V$ дискретна, и иррациональным – иначе. Далее, в отличие от поставновки торической геометрии, рассматриваемые вееры не предполагаются рациональными.

Пример. *Калиброванный веер, заданный четвёркой* $\{\{1,2\}, \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}, \mathbb{R}, \{-1, 1\}\}$ *рационален, а калиброванный веер с данными* $\{\{1,2\}, \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}, \mathbb{R}, \{-1, \sqrt{2}\}\}$ *иррационален.*

Если множество S и пространство V легко определяются из контекста, будем вместо четвёрки задавать веер данными $\{\mathcal{K}; a_1, \dots a_m\}$, имея в виду, что множество S есть $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$, симплициальный комплекс задан на этом множестве, а калибровка ρ сопоставляет индексу $i \in [m]$ вектор a_i пространства V.

Момент-угол-многообразие

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ – симплициальный комплекс полного симплициального калиброванного веера Σ в n-мерном вещественном пространстве $N_\mathbb{R}$ с векторами $a_1, \dots, a_m$ на лучах. Рассмотрим линейный оператор $A : \mathbb{R}^m \to N_\mathbb{R}$, $e_i \mapsto a_i$ и положим

$$R_\Sigma = exp(KerA) = \{(e^{w_1}, \dots, e^{w_m}) : (w_1, \dots, w_m) \in KerA\} =$$

$$= \{(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m_> : t_1^{\langle a_1, u\rangle} \cdot \ldots \cdot t_m^{\langle a_m, u\rangle} = 1 \text{ для всех } u \in N^*_\mathbb{R}\} \subset (\mathbb{C}^\times)^m$$

Отметим, что $R_\Sigma \cong \mathbb{R}^{m-n}$ как вещественная группа Ли, и определяется только набором лучей веера. Рассмотрим действие группы R_Σ покоординатными умножениями на $\mathbb{C}^m$. Ясно, что, как и действие всего алгебраического тора $(\mathbb{C}^\times)^m$, это действие оставляет $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ инвариантным.

Теорема 3 ([3], Theorem 2.3)**.** *Пусть данные $\{\mathcal{K}; a_1, \dots, a_m\}$ задают полный симплициальный веер в $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$. Тогда:*

(a) Действие R_Σ на $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ свободно и собственно, а значит пространство орбит $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/R_\Sigma$ является гладким вещественным многообразием размерности $m+\ n$.

(b) $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/R_\Sigma$ гомеоморфно $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, и следовательно, рассматриваемое действие определяет на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ структуру гладкого многообразия.

Чтобы подчеркнуть наличие гладкой структуры, будем писать $\mathcal{Z}_\Sigma$ вместо $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, говоря о гладком момент-угол-многообразии.

Комплексные стуктуры

Предположим, что $m+n$, то есть размерность момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, чётно. Тогда размерность $KerA$, равная $m-n$, тоже чётна. Введя комплексную структуру на $KerA$, мы получили бы голоморфное действие комплексной группы Ли $R_\Sigma = exp(KerA)$ на $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$, превратив тем самым $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/R_\Sigma \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ в комплексное многообразие. Ниже будет описан несколько иной, но эквивалетный, способ.

Конструкция 1 ([3], Construction 3.1)**.** Обозначим $l = \frac{m-n}{2}$. Будем рассматривать отображения $\Psi : \mathbb{C}^l \hookrightarrow \mathbb{C}^m$, удовлятворяющие следующим двум свойствам:

(i) композиция $\mathbb{C}^l \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^m \xrightarrow{Re} \mathbb{R}^m$ инъективна;

(ii) композиция $\mathbb{C}^l \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C}^m \xrightarrow{Re} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} V$ нулевая.

Для всякого такого отображения Ψ определим комплексно-аналитическую подгруппу $H_{\Sigma,\Psi} = exp(\Psi(\mathbb{C}^l))$ в $(\mathbb{C}^\times)^m$. Она голоморфно действует на $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$. Из свойства (a) отображения Ψ следует, что $H_{\Sigma,\Psi}$ изоморфна $\mathbb{C}^l$ как комплексная группа Ли.

Теорема 4 ([3], Theorem 3.3)**.** *Пусть данные $\{\mathcal{K}; a_1, \dots, a_m\}$ задают полный симплициальный веер в $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, группа $H_{\Sigma,\Psi}$ определена отображением Ψ, удовлетворяющим свойствам (i), (ii) выше. Тогда:*

(a) Действие группы $H_{\Sigma,\Psi}$ на $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$ свободно и собственно, тем самым фактор-пространство $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/H_{\Sigma,\Psi}$ является комплексным многообразием.

(b) *Имеется T^m-эквивариантный диффеоморфизм $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/H_{\Sigma,\Psi} \cong \mathcal{Z}_\Sigma$, задающий комплексную структуру на $\mathcal{Z}_\Sigma$, в которой комплексный тор T^m действует голоморфными преобразованиями.*

С целью подчеркнуть выбранную комплексную структуру далее будем использовать обозначение $\mathcal{Z}_{\Sigma,\Psi}$. Однако, при отсутствии двусмысленности будем писать более кратко: $\mathcal{Z}_\Sigma$ или $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ вместо $\mathcal{Z}_{\Sigma,\Psi}$.

Каноническое голоморфное слоение на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$

Комплексифицируем оператор A

$$A_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m \to N_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad e_i \mapsto a_i,$$

и рассмотрим группу

$$G_\Sigma = exp(KerA_{\mathbb{C}}) \subset (\mathbb{C}^\times)^m.$$

Заметим, что в случае рационального веера из соотношения, задающего обозначенную так же группу G_Σ для торического многообразия, видно, что новым определением мы задаём ту же самую группу.
Для всякого Ψ, удовлетворяющего условиям *Конструкции 1*, соответствующая группа $H_{\Sigma,\Psi}$ содержится в G_Σ. Также в G_Σ содержится подгруппа $T_\Sigma = exp(i \cdot KerA)$. Как подгруппа $(\mathbb{C}^\times)^m$ она содержится в $T^m \subset (\mathbb{C}^\times)^m$. Кроме того, для всякого выбора Ψ факторгруппа $F_{\Sigma,\Psi} = G_\Sigma/H_{\Sigma,\Psi}$ изоморфна T_Σ.

Таким образом, мы получаем голоморфное слоение $\mathcal{F}_T$ на $\mathcal{Z}_{\Sigma,\Psi} = U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})/H_{\Sigma,\Psi}$ орбитами $F_{\Sigma,\Psi} = G_\Sigma/H_{\Sigma,\Psi} \cong T_\Sigma$. В рациональном случае имеем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}) \arrow[dr, "/H_{\Sigma,\Psi}"] \arrow[dd, "/G_\Sigma"'] & \\
& \mathcal{Z}_{\Sigma,\Psi} \arrow[dl, "/(G_\Sigma/H_{\Sigma,\Psi}) \cong T_\Sigma"] \\
V_\Sigma &
\end{tikzcd}$$

При этом группа T_Σ оказывается замкнутой в T^m и изоморфной тору T^{m-n}. В общем же случае подгруппа T_Σ оказывается незамкнутой, а пространство слоёв слоения $\mathcal{F}_T$ – нехаусдорфовым.

4. Автоморфизмы

Перейдём к изучению группы биголоморфных автоморфизмов комплексных момент-угол-многообразий. Простейшее представление о ней даёт следующая теорема.

Теорема 5 ([5], Corollary)**.** *Пусть X – компактное комплексное многообразие. Тогда группа его биголоморфных автоморфизмов $Aut(X)$ имеет структуру комплексной группы Ли.*

Далее поймём, как автоморфизмы взаимодействуют с каноническим слоением.

Ещё о каноническом слоении

В этом подразделе предполагаем веер Σ полным, симплициальным, но необязательно рациональным.

Конструкция 2. Пусть T – какой-нибудь максимальный тор в компоненте связности единицы $Aut^0(\mathcal{Z}_\Sigma)$ группы Ли биголоморфных автоморфизмов $\mathcal{Z}_\Sigma$. Обозначим его (вещественную) касательную алгебру $\mathfrak{t}$. На группе автоморфизмов индуцирована комплексная структура J. Рассмотрим **комплексную** подалгебру $\mathfrak{t} \cap J\mathfrak{t}$ в касательной алгебре к $Aut(\mathcal{Z}_\Sigma)$. Обозначим $F \subset T \subset Aut(\mathcal{Z}_\Sigma)$ связную комплексную группу Ли с касательной алгеброй $\mathfrak{t} \cap J\mathfrak{t}$. Отметим, что она не обязана быть замкнутой подгруппой в торе T.

Предложение 1 ([4], Lemma 2.1)**.** *Группа Ли F из Конструкции 2 не зависит от выбора максимального тора T. Кроме того, она централизуется компонентой связности единицы $Aut^0(\mathcal{Z}_\Sigma)$ и нормализуется, таким образом, всеми голоморфными автоморфизмами $\mathcal{Z}_\Sigma$.*

Замечание. Помимо комплексной подалгебры $\mathfrak{t} \cap J\mathfrak{t}$ можно рассматривать произвольное подпространство в $\mathfrak{t}$, инвариантное относительно комплексного сопряжения в касательной алгебре к $Aut(\mathcal{Z}_\Sigma)$. Для него утверждение о централизации и нормализации также будет верно.

Предложение 2 (см. [7], Proposition 7.2.4)**.** *Группа F совпадает с F_Σ.*

Замечание. Конструкция группы F зависит от комплексной структуры на $\mathcal{Z}_\Sigma$ (определяющей комплексную структуру и, следовательно, комплексное сопряжение в касательной алгебре группы автоморфизмов). Выбором комплексной структуры по *Конструкции 1* определяется и группа F_Σ.

Автоморфизмы рациональных момент-угол-многообразий

Пусть теперь веер Σ, в дополнение ко всему, рационален. Тогда из *Предложений 1, 2* прямо следует предложение ниже.

Предложение 3. *Пусть Σ – рациональный (полный, симплициальный) веер. Тогда всякий автоморфизм $\phi \in Aut(\mathcal{Z}_\Sigma)$ нормализует действие $F_\Sigma = G_\Sigma/H_\Sigma$ на $\mathcal{Z}_\Sigma$ и, таким образом, спускается на пространство орбит – торическое многообразие V_Σ. Как следствие, возникает канонический гомоморфизм спуска $\pi_* : Aut(\mathcal{Z}_\Sigma) \to Aut(V_\Sigma)$. Его ядро есть в точности F_Σ.*

Предложением 4 ниже утверждается возможность подъёма всякого автоморфизма рационального момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_\Sigma$ на пространство $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$. При этом подъём осуществляется через промежуточный шаг, заключающийся в спуске автоморфизма на торическое многообразие, возможность подъёма с которого гарантируется *Теоремой 2*. Для доказательства *Предложения 4* нам требуется сформулировать ещё одну важную лемму, а также упомянуть знаменитую теорему, известную как *GAGA principle*.

Теорема 6 ([6], Proposition 15)**.** *Всякое голоморфное отображение из полного комплексного алгебраического многообразия в комплексное алгебраическое многообразие является регулярным (алгебраическим).*

Теорема гарантирует, что спуском мы получим не просто голоморфный, но регулярный автоморфизм, к которому мы сможем применить *Теорему 1*.

Лемма (см. [7], Corollary 4.3.2)**.** *Пусть Σ – рациональный веер. Вне зависимости от выбора комплексной структуры в Конструкции 1, нормализатор подгруппы H_Σ в группе (голоморфных) автоморфизмов $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$ совпадает с нормализатором подгруппы G_Σ.*

Эта лемма позволяет утверждать, что автоморфизм, полученный подъёмом с торического многообразия, действительно даст автоморфизм $\mathcal{Z}_\Sigma$.

Предложение 4 (см. [7], Proposition 8.2.1)**.** *Пусть Σ – полный рациональный симплициальный веер. Обозначим $Aut(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), H_\Sigma)$ подгруппу биголоморфных автоморфизмов $U_\mathbb{C}(\mathcal{K})$, нормализующих действие группы H_Σ. Тогда гомоморфизм спуска $\pi_*^H : Aut(U_\mathbb{C}(\mathcal{K}), H_\Sigma) \to Aut(\mathcal{Z}_\Sigma)$ **сюръективен**.*

Доказательство. Пусть $\phi \in Aut(\mathcal{Z}_\Sigma)$. Пользуясь *Предложением 3*, спустим автоморфизм ϕ на V_Σ. Так как V_Σ полно, полученный автоморфизм $\pi_*\phi$, будучи биголоморфным, по *Теореме 6* обязан быть регулярным. Тогда, пользуясь *Теоремой 2* для торических многообразий, поднимем $\pi_*\phi$ некоторым образом до автоморфизма $\widetilde{\phi} \in Aut(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), G_{\Sigma})$. Согласно Лемме, полученный автоморфизм спускается до автоморфизма $\pi_*^H \widetilde{\phi}$ из $Aut(\mathcal{Z}_{\Sigma})$. Теперь, наконец, *Предложение 3* гарантирует, что $\pi_*^H \widetilde{\phi}$ может отличаться от исходного ϕ только на элемент $f \in F_{\Sigma} = G_{\Sigma}/H_{\Sigma}$. Рассмотрев любой проообраз f при проекции $G_{\Sigma} \twoheadrightarrow F_{\Sigma}$ и при необходимости прокомпонировав с ним найденный ранее $\widetilde{\phi}$, получим искомый подъём автоморфизма $\phi \in Aut(\mathcal{Z}_{\Sigma})$ на $U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K})$. $\square$

Предложение 5 (см. [7], Proposition 8.2.2)**.** *Ядро гомоморфизма спуска π_*^H в точности совпадает с H_{Σ}.*

Наконец, в рациональном случае мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть Σ – рациональный полный симплициальный веер, Ψ – линейное отображение, удовлетворяющее Конструкции 1 и задающее, таким образом, комплексную структуру на гладком многообразии $\mathcal{Z}_{\Sigma}$. Тогда для группы биголоморфных автоморфизмов $\mathcal{Z}_{\Sigma,\Psi}$ имеет место следующая точная последовательность:*

$$1 \longrightarrow H_{\Sigma,\Psi} \longrightarrow Aut(U_{\mathbb{C}}(\mathcal{K}), H_{\Sigma,\Psi}) \longrightarrow Aut(\mathcal{Z}_{\Sigma,\Psi}) \longrightarrow 1.$$

При этом оказывается, что, как и для торических многообразий, группа $Aut(U(\mathcal{K}_{\Sigma}), H_{\Sigma,\Psi})$ имеет хорошее описание, в частности, состоит из полиномиальных автоморфизмов, см. [7], Proposition 4.2.1, Theorem 5.3.2.

Список литературы

[1] D. Cox. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety.* J. Algebraic Geom 4 (1995), 15-50.

[2] Victor Buchstaber, Taras Panov. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[3] Taras Panov, Yuri Ustinovsky, Misha Verbitsky. *Complex geometry of moment-angle manifolds.* Math. Zeitschrift 284 (2016), no.1, 309-333.

[4] Ishida, H., Kasuya, H. *Transverse Kähler structures on central foliations of complex manifolds.* Annali di Matematica 198 (2019), 61–81.

[5] Bochner S., Montgomery D., Locally compact groups of differentiable transformations, Ann. of Math. (2) 47 (1946), 639–653.

[6] Serre, Jean-Pierre. *Géométrie algébrique et géométrie analytique.* Annales de l'Institut Fourier, Volume 6 (1956), 1-42.

[7] Gregory Taroyan. *Equivariant automorphisms of the Cox construction and applications.* arXiv:2403.02465.