Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

# Курсовая работа

## Когомологии Дольбо комплексных момент-угол-многообразий

Работу выполнил:
Студент 341 группы
Рысин Олег Михайлович
Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

1 мая 2025 г.

# Содержание



# 1 Введение

Момент-угол-комплекс – один из ключевых объектов в торической топологии. В тех случаях, когда он является топологическим многообразием, возникает естественный вопрос: как можно этот объект снабдить той или иной геометрической структурой? Конкретно – структурой гладкого или комплексного многообразия.

Один из вариантов ответа на этот вопрос дает фактор-конструкция, происходящая из полиэдрального веера: момент-угол-многообразие отождествляется с факторпространством открытого подмножества в комплексном пространстве по действию вещественной или комплексной группы Ли. При этом разумно задаться вопросом, что это за структуры, исследовать их свойства, попытаться понять, какие параметры влияют или не влияют на то, что за многообразие получится в результате применения конструкции.

Данная работа посвящена прежде всего изучению когомологий Дольбо момент-угол-многообразий с комплексной структурой, происходящей из веера. В начале будет изложена сама фактор-конструкция. После мы рассмотрим сюжет, связанный с голоморфным слоением на комплексном момент-угол-многообразии и вычислением соотвествующих базисных когомологий, он станет промежуточным шагом на пути к вычислению когомологий Дольбо в общем случае. Однако полезно рассмотреть и рациональный случай, когда изучаемую конструкцию удается связать с фактор-конструкцией торических многообразий. Тогда имеется голоморфное расслоение момент-угол-многообразия над торическим многообразием, слой которого – комплексный тор (компактный), что позволяет прийти к явному описанию когомологий Дольбо. В последнем же разделе будет рассмотрен результат, полученный для общего случая, и приведен пример вычисления когомологий Дольбо для произведения двух трехмерных сфер (многообразия Калаби-Экмана $CE(1,1)$).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за помощь и уделенное время.

## 2 Экспоненциальное действие и комплексная структура на момент-угол-многообразиях

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m] = \{1, \ldots, m\}$.
$\mathbb{D}^m = \{z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_k| \leq 1\}$ – $m$-мерный полидиск.

**Определение 2.1.** *Момент-угол-комплекс*, соответствующий $\mathcal{K}$, есть подмножество $m$-мерного полидиска, которое определяется следующим образом:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} Y_1 \times \ldots \times Y_m,\ Y_j = \begin{cases} \mathbb{D},\ j \in I \\ \mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D},\ j \notin I \end{cases}$$

В случае, когда $\mathcal{K}$ – триангуляция сферы, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является топологическим многообразием [1, Theorem 4.1.4]. Далее будем рассматривать *момент-угол-многообразия* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, где $\mathcal{K}$ – подлежащий комплекс *полного симплициального веера* $\Sigma$. Веер $\Sigma$ в пространстве $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ полностью определяется данными $\{\mathcal{K};\ a_1, \ldots, a_m\},\ a_k \in N_{\mathbb{R}}$ – порождающие одномерных конусов.

**Конструкция 1.** $\Sigma : \{\mathcal{K};\ a_1, \ldots, a_m\}$ – полный симплициальный веер в $N_{\mathbb{R}}$.
Рассмотрим открытое подмножество в $\mathbb{C}^m$ следующего вида:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{K}} \{z_{i_1} = \ldots = z_{i_k} = 0,\ \{i_1, \ldots, i_k\} = I\}$$

Заметим, что $U(\mathcal{K})$ – торическое многообразие с веером $\{\mathcal{K};\ e_1, \ldots, e_m\},\ e_j$ – $j$-й вектор стандартного базиса $\mathbb{R}^m$.
Рассмотрим также сюръективное линейное отображение:

$$A\colon \mathbb{R}^m \to N_{\mathbb{R}}$$
$$e_j \mapsto a_j$$

Определим в $(\mathbb{C}^\times)^m$ вещественную подгруппу $R = exp(KerA) = \{(e^{x_1}, \ldots, e^{x_m}),\ x = (x_1, \ldots, x_m) \in KerA\}$ и ограничим действие $(\mathbb{C}^\times)^m$ на $U(\mathcal{K})$ до действия $R$.

**Теорема 2.1** ([1, Theorem 6.5.2])**.** *В условиях конструкции верны следующие утверждения:*

(1) *Действие $R$ на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственно; следовательно, $U(\mathcal{K})/R$ – $(m+n)$-мерное гладкое многообразие*

(2) *Пространство орбит $U(\mathcal{K})/R$ гомеоморфно $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$*

Таким образом момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ наделяется гладкой структурой.

Теперь предположим, что $(m+n)$ четно. Обозначим $l = \frac{(m-n)}{2}$.

**Конструкция 2.** Чтобы наделить $KerA$ комплексной структурой, выберем в $\mathbb{C}^m$ $l$-мерное комплексное подпространство, удовлетвояющее двум условиям:

$(a)$ Композиция $\mathbb{C}^l \cong \mathfrak{h} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^m \xrightarrow{Re} \mathbb{R}^m$ инъективна

$(b)$ Композиция $\mathfrak{h} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^m \xrightarrow{Re} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} N_{\mathbb{R}}$ нулевая

Здесь $\psi \colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ – вложение комплексного подпространства. Также $\psi_j \colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ – $j$-я проекция.
Рассмотрим теперь комплексную подгруппу $H = \{(e^{\langle \psi_1, w\rangle}, \ldots, e^{\langle \psi_m, w\rangle}),\ w \in \mathfrak{h}\}$ в $(\mathbb{C}^{\times})^m$.

**Теорема 2.2** ([1, Theorem 6.6.3])**.** *В условиях конструкции верны следующие утверждения:*

(1) *Голоморфное действие $H$ на $U(\mathcal{K})$ свободно и собственно; следовательно, $U(\mathcal{K})/H$ – комплексное многообразие*

(2) *Пространство орбит $U(\mathcal{K})/H$ диффеоморфно $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, причем компактный тор $\mathbb{T}^m$ действует на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ голоморфными преобразованиями*

Подведем итог: комплексная структура на четномерном момент-угол-многообразии определяется двумя данными:

- Полным симплициальным веером $\Sigma$
- Комплексной структурой на ядре отображения $A$

# 3 Каноническое слоение и базисные когомологии

Комплексифицируем отображение $A$ и определим подгруппу $R_{\mathbb{C}} \subset (\mathbb{C}^{\times})^m$ аналогично тому, как определялась подгруппа $R$ в **Конструкции 1**:

$$R_{\mathbb{C}} = exp(KerA_{\mathbb{C}})$$

Вместе с этим рассмотрим подгруппу $H' = exp(iKerA) \subset \mathbb{T}^m \subset (\mathbb{C}^{\times})^m$. Имеем *каноническое* голоморфное слоение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong U(\mathcal{K})/H$ орбитами $H' \cong R_{\mathbb{C}}/H$ (подробнее эта конструкция будет описана в разделе 5).

**Определение 3.1.** Пусть $M$ – многообразие с действием связной группы Ли $G$ с касательной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$
$\Omega_{\mathfrak{g}}(M) = \{\omega \in \Omega(M) : \iota_{X_v}\omega = L_{X_v}\omega = 0 \quad \forall v \in \mathfrak{g}\}$
$H^*_{\mathfrak{g}}(M) = H^*(\Omega_{\mathfrak{g}}(M),\ d)$ – *базисные когомологии* $M$

Далее приведен ряд утверждений, позволяющих вычислить базисные когомологии момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ с действием определенной выше группы Ли $H'$.

**Лемма 3.1** ([2, Lemma 2.2]). *$G$ - компактный тор, $\Omega_{\mathfrak{g}}(M)^G$ - подпространство $G$-инвариантных базисных форм*
*Вложение $\Omega_{\mathfrak{g}}(M)^G \hookrightarrow \Omega_{\mathfrak{g}}(M)$ индуцирует изоморфизм когомологий*

Определим *модель Картана* следующим образом:

$$C_{\mathfrak{g}}(\Omega(M)) = ((S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(M))^{\mathfrak{g}},\ d_{\mathfrak{g}})$$

Здесь $S(\mathfrak{g}^*)$ – симметрическая алгебра на $\mathfrak{g}^*$ с порождающими степени 2, $(S(\mathfrak{g}^*)\otimes\Omega(M))^{\mathfrak{g}}$ – подалгебра $\mathfrak{g}$-инвариантов (ее элемент $\omega$ есть "$\mathfrak{g}$-эквивариантное полиномиальное отображение из $\mathfrak{g}$ в $\Omega(M)$"), а дифференциал действует по формуле: $d_{\mathfrak{g}}(\omega)(v) = d(\omega(v)) - \iota_{X_v}(\omega(v))$.

**Лемма 3.2** ([2, Lemma 3.1]). $H^*_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^*(S(\mathfrak{h}'^*) \otimes \Omega(M)^{\mathbb{T}^m},\ d_{\mathfrak{h}'})$

**Теорема 3.1** ([2, Theorem 3.4]). $H^*_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{R}[v_1,\dots,v_m]/(I_{\mathcal{K}} + J_\Sigma), \quad v_j \in H^2_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$
*Здесь $I_{\mathcal{K}} = (\{v_{i_1}\dots v_{i_k} |\ (i_1,\dots,i_k) \notin \mathcal{K}\})$ – идеал Стенли-Райснера*, а идеал $J_\Sigma$ порождается линейными комбинациями вида $\sum\limits_{j=1}^{m} \langle u, a_j\rangle v_j$, где $u \in \mathfrak{h}'^*$

Так же, как и в комплексе де Рама, в комплексе Дольбо можно рассмотреть подкомплекс базисных форм и изучать *базисные когомологии Дольбо.*

**Теорема 3.2** ([3, Theorem 4.11]). *$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ – момент-угол-многообразие с комплексной структурой, происходящей из полного симплициального веера $\Sigma$, тогда для базисных когомологий имеет место разложение Ходжа:*

$$H^r_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$$

$$\textit{Причем } H^{p,q}_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0 \textit{ при } p \neq q$$

Теперь, объединив две предыдущие теоремы, можем получить явное описание кольца базисных когомологий Дольбо для момент-угол-многообразий.

**Теорема 3.3** ([3, Theorem 4.12]). $H^{*,*}_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{R}[v_1,\dots,v_m]/(I_{\mathcal{K}} + J_\Sigma), \quad v_j \in H^{1,1}_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$

# 4 Рациональный случай

В этом разделе будем считать веер $\Sigma$ *рациональным*, то есть $N := \mathbb{Z}\langle a_1,\dots,a_m\rangle$ – дискретная решетка в $N_{\mathbb{R}}$, причем, более того, $a_1,\dots,a_m$ – примитивные векторы в этой решетке. Тогда, согласно известной *конструкции Батырева-Кокса*, $U(\mathcal{K})/R_{\mathbb{C}}$ есть торическое многообразие $V_\Sigma$. При этом голоморфное слоение превращается в расслоение с базой $V_\Sigma$ и слоем $H' \cong \mathbb{T}^{2l}$ ($H'$ связна и замкнута в $\mathbb{T}^m$) – *расслоение Зейферта.*

*Теорема Данилова-Юркевича* [1, Theorem 5.3.1] и разложение Ходжа для торических многообразий (с нетривиальными числами Ходжа только на диагонали $(p,p)$) дают следующий результат:

**Теорема 4.1** ([1, см. раздел 6.7]). $H^{*,*}_{\bar\partial}(V_\Sigma) \cong \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_m]\big/(I_\mathcal{K} + J_\Sigma), \quad v_j \in H^{1,1}_{\bar\partial}(V_\Sigma)$

*Замечание.* Видно, что в данном случае кольцо базисных когомологий Дольбо $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ совпадает с кольцом когомологий Дольбо $V_\Sigma$.

Когомологии Дольбо компактного тора $\mathbb{T}^{2l}$ имеют вид $\bigwedge[\xi_1, \ldots, \xi_l, \eta_1, \ldots, \eta_l]$, где $\xi_k \in H^{1,0}_{\bar\partial}(\mathbb{T}^{2l})$ – классы голоморфных 1-форм и $\eta_k \in H^{0,1}_{\bar\partial}(\mathbb{T}^{2l})$ – классы антиголоморфных 1-форм.

Основной результат этого раздела – *теорема Панова-Устиновского* – дает способ вычислить когомологии Дольбо момент-угол-многообразия с комплексной структурой, происходящей из полного симплициального веера, в рациональном случае.

**Теорема 4.2** ([1, Theorem 6.7.2]). $\Sigma : \{\mathcal{K};\ a_1, \ldots, a_m\}$ *– полный регулярный веер. Тогда имеется изоморфизм:*

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^{*,*}(H^{*,*}_{\bar\partial}(\mathbb{T}^{2l}) \otimes H^{*,*}_{\bar\partial}(V_\Sigma),\ d)$$

$dv_j = d\eta_k = 0, \quad d\xi_k = c(\xi_k),$ *где* $c\colon H^{1,0}_{\bar\partial}(\mathbb{T}^{2l}) \to H^{1,1}_{\bar\partial}(V_\Sigma)$ *– отображение первого класса Чженя*

Применим теорему для вычисления когомологий *многообразия Калаби-Экмана* – произведения двух нечетномерных сфер, наделенного комплексной структурой.

**Пример 4.1** ([1, Example 6.7.9]). Рассмотрим случай нормального веера произведения двух дельзановых симплексов $\Delta^p \times \Delta^q,\ 1 \le p \le q \le n-1,\ p+q = n$. Тогда $V_\Sigma$ – произведение комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$ и $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong \mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1} =: CE(p,q)$
Веер можно задать данными $\{\mathcal{K}; a_1, \ldots, a_{n+2}\}$, где $a_1, \ldots, a_p,\ a_{p+2}, \ldots, a_{n+1}$ – базис решетки $N$ и $a_1 + \ldots + a_{p+1} = a_{p+2} + \ldots + a_{n+2} = 0$.
В качестве $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n+2}$ возьмем $w \mapsto (w, \ldots, w,\ \tau w, \ldots, \tau w),\ \tau \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.
Имеем расслоение $CE(p,q)$ над $\mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$ со слоем $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}\big/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$.
Кольцо когомологий Дольбо $\mathbb{C}P^p \times \mathbb{C}P^q$ есть $\mathbb{C}[x,y]\big/(x^{p+1}, y^{q+1})$.

$$H^{*,*}_{\bar\partial}(CE(p,q)) \cong H^{*,*}(\textstyle\bigwedge[\xi,\eta] \otimes \mathbb{C}[x,y]\big/(x^{p+1}, y^{q+1}), d)$$
$$dx = dy = d\eta = 0,\ d\xi = x - y \text{ – для подходящих } x, y$$

В итоге имеем $H^{*,*}_{\bar\partial}(CE(p,q)) \cong \bigwedge[\omega, \eta] \otimes \mathbb{C}[x]\big/(x^{p+1})$, где $\omega = [\xi \frac{x^{q+1} - y^{q+1}}{x-y}] \in H^{q+1,q}_{\bar\partial}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.
Заметим, что результат зависит только от $p$ и $q$.

# 5 Общий случай

Если отказаться от требования рациональности веера, имеется модель для когомологий Дольбо, похожая на рассмотренную в предыдущем разделе, однако описание дифференциала уже не столь явное.

**Теорема 5.1** ([3, Theorem 6.1])**.** *Найдется такое* $(m-n)$*-мерное подпространство* $W \subset \Omega^1(\mathcal{Z}_\mathcal{K})^{H'}$, *что есть квази-изоморфизм* (т.е. отображение, индуцирующее изоморфизм в когомологиях):

$$(H^{*,*}_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \otimes \bigwedge(W^{1,0} \oplus W^{0,1}),\ \bar{D}) \xrightarrow{\simeq} (\Omega^{*,*}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}),\ \bar{\partial}), \quad W \otimes \mathbb{C} = W^{1,0} \oplus W^{0,1}$$

$$\bar{D}(H^{*,*}_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})) = \bar{D}(W^{0,1}) = 0, \quad \bar{D} : W^{1,0} \to H^{1,1}_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}),\ \bar{D}\omega = [\bar{\partial}\omega]_{\mathfrak{h}'}$$

Стоит отметить, что этот результат опирается на работу Исиды и Кадзуя [4], в которой такая же модель, вместе с аналогом для вычисления когомологий де Рама, была построена для компактных комплексных многообразий, на которых задано *центральное* слоение с *трансверсально кэлеровой структурой.* Сделаем некоторое отступление, чтобы обсудить это подробнее.

**Конструкция 3.** Пусть $M$ – компактное комплексное многообразие, $G_M$ – связная компонента единицы группы его биголоморфизмов (комплексная группа Ли), J – комплексная структура на $\mathfrak{g}_M$ – касательной алгебре Ли $G_M$. $\mathbf{T}$ – некоторый максимальный компактный тор в $G_M$ и $\mathfrak{t}$ – его алгебра Ли. Теперь определим $\mathfrak{h}_M :\ = \mathfrak{t} \bigcap J\mathfrak{t}$ и обозначим через $H_M$ соответствующую подгруппу Ли в $G_M$. $H_M$ действует на $M$ почти свободно. Помимо этого, $\mathfrak{h}_M$ не зависит от выбора максимального тора, и ее элементы централизуют $\mathfrak{g}_M$ [4, Lemma 2.1]. Любое комплексное подпространство $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_M$ задает на $M$ *центральное* голоморфное слоение; слоение, соответствующее $\mathfrak{h}_M$, назовем *каноническим* (в случае момент-угол-многообразия $H_M = H'$).

**Определение 5.1.** $\mathcal{F}$ – голоморфное слоение на комплексном многообразии $M$. $(1,1)$-форма $\omega_\mathcal{F}$ *трансверсально кэлерова* относительно $\mathcal{F}$, если выполнены следующие условия:

- $d\omega_\mathcal{F} = 0$;
- $\omega_\mathcal{F}$ положительна и зануляется в точности на касательном пространстве к $\mathcal{F}$.

*Замечание.* Момент-угол-многообразие с комплексной структурой, происходящей из веера $\Sigma$, допускает трансверсально кэлерову структуру в том и только том случае, если $\Sigma$ – нормальный веер многогранника общего положения [5, Proposition 4.4].
В частности, ее допускает каноническое слоение на момент-угол-многообразиях, происходящих из веера в двумерном пространстве.

Сейчас нам будет полезно обратить внимание на вышеупомянутую модель для когомологий де Рама из работы Исиды и Кадзуя [4, Theorem 1.2]:

$$(H^*_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \otimes \bigwedge W,\ D) \xrightarrow{\simeq} (\Omega^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}),\ d)$$

$$D(H^*_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})) = 0, \quad D : W \to H^2_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}),\ D\omega = [d\omega]_{\mathfrak{h}'}$$

Это описание применимо и для момент-угол-многообразий, т.к. в [4] трансверсально кэлерова структура требовалась для того, чтобы применить $\partial\bar{\partial}$-лемму [4, см. раздел 4.3], условия которой, как было показано в [3], выполнены в случае канонического слоения на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Теперь докажем вспомогательное утверждение.

**Утверждение 5.1.** *Пусть* $H^1(\mathcal{Z}_\mathcal{K})=0$. *Тогда дифференциал* $\bar{D}$ *инъективен на* $W^{1,0}$.

*Доказательство.* Покажем сначала инъективность $D$ на W:

$$W\ni\omega \text{ замкнута} \quad\Rightarrow\quad \omega \text{ точна} \quad\Rightarrow\quad \exists\ \alpha\in H^0_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\colon\ \omega=d\alpha \quad\Rightarrow\quad \omega=0$$

Тогда инъективен на $W\otimes\mathbb{C}$ комплексифицрованный дифференциал $D_\mathbb{C}$.

$$\omega\in W^{1,0}:\ D_\mathbb{C}\omega=[d_\mathbb{C}\omega]_{\mathfrak{h}'}=[\bar\partial\omega+\partial\omega]_{\mathfrak{h}'}=[\bar\partial\omega]_{\mathfrak{h}'}+[\partial\omega]_{\mathfrak{h}'}=[\bar\partial\omega]_{\mathfrak{h}'}$$
$$\text{т.к. } [\partial\omega]_{\mathfrak{h}'}\in H^{2,0}_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})=0$$

В итоге $\bar{D}\omega=[\bar\partial\omega]_{\mathfrak{h}'}=D_\mathbb{C}\omega=0 \quad\Rightarrow\quad \omega=0$ □

Среди примеров, для которых выполнено условие утверждения, есть и многообразия Калаби-Экмана. Разберем случай $CE(1,1)$.

**Пример 5.1.** Веер $\Sigma$ в $N_\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ задан как: $\{\mathcal{K};\ e_1,e_2,-e_1+\lambda e_2,-e_2\}$,
где $\mathcal{K}=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}$ – граница квадрата, $\lambda\in\mathbb{R}$.
В этом случае $\mathcal{Z}_\mathcal{K}\cong\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ и $H^{*,*}_{\mathfrak{h}'}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\cong\mathbb{C}[u,v]/(u^2,(v+\frac{\lambda}{2}u)^2)\cong\mathbb{C}[u,v]/(u^2,v^2)$.
Найдем подпространство $W$, удовлетворяющее условиям **Теоремы 5.1.**

$$W^{1,0}\oplus W^{0,1}=\mathbb{C}\langle\xi\rangle\oplus\mathbb{C}\langle\eta\rangle,\quad \bigwedge(W^{1,0}\oplus W^{0,1})=\bigwedge[\xi,\eta]$$
$$du=dv=d\eta=0,\quad d\xi=au+bv,\ (a,b)\neq(0,0)$$

Без ограничения общности $a\neq 0$.
Линейная замена $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b+1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ приводит к $dx=dy=d\eta=0,\quad d\xi=x-y$.

Итак, свели вычисление к **Примеру 4.1.**
Вывод: когомологии Дольбо $CE(1,1)$ неизменны при деформации веера с помощью вещественного параметра $\lambda$.

# Список литературы


[1] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov, Toric topology, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, DOI 10.1090/surv/204. MR3363157

[2] Hiroaki Ishida, Roman Krutowski, and Taras Panov, Basic cohomology of canonical holomorphic foliations on complex moment-angle manifolds, Internat. Math. Research Notices (2020), DOI 10.1093/imrn/rnaa252.

[3] Roman Krutowski and Taras Panov, Dolbeault cohomology of complex manifolds with torus action, Contemporary Mathematics Volume 772, 2021, DOI 10.1090/conm/772/15489

[4] Hiroaki Ishida and Hisashi Kasuya, Transverse Kähler structures on central foliations of complex manifolds, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 198 (2019), no. 1, 61–81, DOI 10.1007/s10231- 018-0762-8. MR3918619

[5] Taras Panov, Yuri Ustinovsky, Misha Verbitsky. Complex geometry of moment-angle manifolds. Math. Zeitschrift 284 (2016), no.1, 309-333.