ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА Высшей Геометрии и Топологии

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Полиэдральные произведения, граф-произведения и p-центральные ряды

Выполнил студент
603 группы
Рахматуллаев Темурбек Анасбекович

____
подпись студента

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

____
подпись научного руководителя

Москва

2024

Содержание

1. Введение 2
2. Полиэдральные произведения и граф-произведения 4
3. Центральные фильтрации и ассоциированные алгебры Ли 11
4. Ограниченные алгебры Ли и p-центральные ряды 14
5. Групповые алгебры 16
6. Нижние p-центральные ряды граф произведений элементарных абелевых p-групп 17

Список литературы 20

1. Введение

Полиэдральное произведение $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$ определено для последовательности пар топологических пространств $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = ((X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m))$ и симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$. Полиэдральные произведения возникли в торической топологии [BP15] и в последнее время активно изучаются в теории гомотопий [BBC20]. В случае, когда каждое A_i является точкой, полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} = (\boldsymbol{X}, pt)^{\mathcal{K}}$ содержит m-кратный букет $X_1 \vee \dots \vee X_m$ и содержится в m-кратном произведении $X_1 \times \dots \times X_m$. Важными примерами полиэдральных произведений являются пространство Дэвиса–Янушкевича $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$, момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$ и его вещественный аналог $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$.

Полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ можно определить также для последовательности объектов $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)$ в произвольной категории C с конечными произведениями и копределами или в симметрической моноидальной категории с конечными копределами.

Для многих алгебраических категорий, таких как группы GRP или ассоциативные алгебры ASS, полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ зависит только от одномерного остова (графа) $\mathcal{K}^1 = \Gamma$ и называется *граф-произведением*, а категории с таким свойством называются *толстыми*. Это отражает тот факт, что множество попарно коммутирующих элементов группы (алгебры) порождает коммутативную подгруппу (подалгебру). Граф-произведения часто возникают в комбинаторной и геометрической теории групп. Наиболее известными примерами являются *прямоугольная группа Артина*

$$RA_{\mathcal{K}} = F(a_1, \dots, a_m)/\big(a_i a_j = a_j a_i \text{ при } \{i, j\} \in \mathcal{K}\big),$$

которая является граф-произведением $\mathbb{Z}^{\mathcal{K}}$, и *прямоугольная группа Коксетера*

$$RC_{\mathcal{K}} = F(a_1, \dots, a_m)/\big(a_i^2 = 1,\ a_i a_j = a_j a_i \text{ при } \{i, j\} \in \mathcal{K}\big),$$

которая является граф-произведением $\mathbb{Z}_2^{\mathcal{K}}$. (Мы обозначаем группу целых чисел через $\mathbb{Z}$, а группу/поле вычетов по простому модулю p через $\mathbb{Z}_p$.)

Ряд результатов для момент-угол-комплексов и их вещественных аналогов имеют похожие формулировки, но отличаются в технике доказательств. К таким результатами относится копредставления фундаментальной группы $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ и гомологий петель $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$, в частности, рассматривая в алгебре коммутатор

$$[x_i, x_j] = x_i x_j - (-1)^{|x_i||x_j|} x_j x_i$$

можно задать минимальные наборы образующих, состоящие из вложенных коммутаторов одинакового вида. Имеющуюся параллель можно рассматривать свойство некоторых функторов сохранять полиэдральные произведения, получаемые из этого обобщения и свойства описаны в разделе 4.

С другой стороны, к задаче можно подходить алгебраически, изучая связь между копредставления алгебр Ли, ассоциированных с центральными рядами дискретных групп. Пусть G - группа, тогда можно изучать алгебру Ли, полученную как прямая сумма $\mathrm{gr}_\bullet\, \gamma(G) = \bigoplus \gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$, где $\gamma(G)$ - центральный ряд группы G. Скобка в такой алгебре соответствует групповому коммутатору. Классическим результатом является доказательство Магнуса [MKC74] изоморфизма алгебры Ли ассоциированной с нижним центральным рядом свободной группы и свободной алгебры Ли. Подход Магнуса предлагает построение отображения «$x \mapsto 1 + x$» из ассоциированной алгебры $\mathrm{gr}_\bullet\, \gamma(G)$ в ассоциативную алгебру U_G с частично коммутативным произведением (свободную, для свободной группы), так, что $U_G \simeq UL_\mathcal{K}$ - универсальная обертывающая граф-алгебры Ли и композиция отображений $L_\mathcal{K} \to L_\gamma \to UL_\mathcal{K}$, задает естественное вложение, что и доказывает мономорфность первой стрелки.

Подход Магнуса позже обобщался [DK92a; DK92b; Wad16] и позволил доказать изоморфизм $\mathrm{gr}_\bullet\, \gamma(RA_\mathcal{K})$ и граф-алгебры Ли, представляющей собой граф-произведение $\mathbb{Z}\langle v\rangle^\mathcal{K}$ тривиальных алгебр Ли $\mathbb{Z}\langle v\rangle = FL(v)$. Для случая прямоугольных групп Кокстера данный подход напрямую не срабатывает. Для алгебры Ли над $\mathbb{Z}_2$, задаваемой как граф-произведение $\mathbb{Z}_2\langle v\rangle^\mathcal{K}$ существует эпиморфизм $\mathrm{gr}_\bullet\, \gamma(RC_\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}_2\langle v\rangle^\mathcal{K}$, который не является мономорфизмом уже в случае когда комплекс $\mathcal{K}$ есть объединение двух точек. Задача описания копредставления $\mathrm{gr}_\bullet\, \gamma(RC_\mathcal{K})$ частично изучена в статьях Веревкина [Вер19; Ver22] и нашей совместной статье [VR24], в частности были исследованы компоненты L_γ до четвертой градуировки включительно. Также некоторый класс интересующих нас групп был рассмотрен в работах Пренера и Валдингера [Pre69; Wal70], где при помощи "процесса сборки коммутаторов" Филиппа Холла [Hal59; Hal34] и "базисных коммутаторов" Маршалла Холла [Hal50; Hal59] был получен конструктивный алгоритм построения базиса градуированных компонент присоединенной алгебры Ли.

Как более естественный объект для групп вида $\mathbb{Z}_p^\mathcal{K}$ к изучению предлагается рассматривать *p-центральные (или p-ограниченные) фильтрации*, ассоциированная алгебра с которыми является *ограниченной алгеброй Ли (или p-алгеброй Ли)*[MM65; Jac41]. *Нижняя p-центральная фильтрация* группы G — это наиболее быстро убывающая центральная фильтрация $\{G = \gamma_1^{[p]}(G) \supset \gamma_2^{[p]}(G) \supset \cdots\}$ со свойством $\left(\gamma_k^{[p]}(G)\right)^p \subset \gamma_{pk}^{[p]}(G)$ для $k = 1, 2, \ldots$. Ассоциированная алгебра Ли является *ограниченной алгеброй Ли* или *p-алгеброй Ли*, т. е. представляет собой $\mathbb{Z}_p$-модуль со скобкой Ли и p-степенной операцией $x \mapsto x^{[p]}$. Подробности приведены в разделе 4.

Нижний 2-центральный ряд группы $RC_\mathcal{K}$ хорошо себя ведет по отношению к граф-произведениям. Обозначая $\mathbb{Z}_p\langle u\rangle = FL_p(u)/(u^{[p]} = 0)$ тривиальную p-алгебру Ли с одной образующей, получаем следующее явное описание 2-алгебры Ли ассоциированной с нижним 2-центральным рядом $RC_\mathcal{K}$ (теорема 6.3): $\mathrm{gr}_\bullet\, \gamma^{[2]}(RC_\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}_2\langle u\rangle^\mathcal{K}$. Этот результат обобщается на граф-произведение элементарных абелевых p-групп для произвольного простого числа p (теорема 6.1). Доказательство использует результат Квиллена [Qui68], связывающий нижнюю p-центральную фильтрацию группы с фильтрацией ее групповой алгебры степенями аугментационного идеала, а также построение аналога отображения Магнуса.

Универсальная обертывающая алгебра $\mathcal{U}_2(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[2]}(RC_\mathcal{K}))$ отождествляется с гомологиями петель пространства $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$ (предложение 6.4). Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *флаговым комплексом*, если любой набор вершин в $\mathcal{K}$, попарно соединенных ребрами, является множеством вершин грани. Тогда в качестве следствия получаем следующую связь между фундаментальной группой полиэдрального произведения пространств $\mathbb{R}P^\infty$ и гомологиями петель полиэдрального произведения пространств $\mathbb{C}P^\infty$ для флаговых комплексов $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{U}_2\big(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[2]}\pi_1(\mathbb{R}P^\infty)^\mathcal{K}\big) \cong H_*\big(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K};\mathbb{Z}_2\big).$$

Все результаты приведённые в данной дипломной работы опубликованы в статье [PR24], кроме теоремы 3.3, опубликованной в [VR24].

2. Полиэдральные произведения и граф-произведения

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на конечном упорядоченном множестве $[m] = \{1,\dots,m\}$. Мы предполагаем, что пустое множество $\varnothing$ и все одноэлементные подмножества $\{i\} \subset [m]$ принадлежат $\mathcal{K}$. Назовём $I = \{i_1,\dots,i_k\} \in \mathcal{K}$ *симплексом* или *гранью* комплекса $\mathcal{K}$. В *категории граней* $\textsc{cat}(\mathcal{K})$ объектами являются симплексы $I \in \mathcal{K}$, а морфизмами — включения $I \subset J$.

Конструкция 2.1 (полиэдральное произведение)**.** Пусть

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}) = \{(X_1,A_1),\dots,(X_m,A_m)\}$$

— последовательность пар топологических пространств с отмеченными точками, $pt \in A_i \subset X_i$, где pt обозначает отмеченную точку. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I = \Big\{(x_1,\dots,x_m) \in \prod_{k=1}^m X_k\colon\ x_k \in A_k \text{ при } k \notin I\Big\}.$$

Обозначим через $\textsc{top}$ категорию топологических пространств с отмеченной точкой. Рассмотрим $\textsc{cat}(\mathcal{K})$-диаграмму

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\mathcal{K}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})\colon\ \textsc{cat}(\mathcal{K}) &\longrightarrow \textsc{top},\\ I &\longmapsto (\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I,\end{aligned}$$

которая отображает морфизм $I \subset J$ из $\textsc{cat}(\mathcal{K})$ во включение пространств $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I \subset (\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^J$.

Полиэдральное произведение $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$, соответствующее комплексу $\mathcal{K}$, определяется как

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^\mathcal{K} = \operatorname{colim}^{\textsc{top}} \mathcal{T}_\mathcal{K}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}) = \operatorname{colim}^{\textsc{top}}_{I\in\mathcal{K}} (\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I.$$

Здесь colim обозначает *функтор копредела* из категории $\mathrm{CAT}(\mathcal{K})$-диаграмм топологических пространств в категорию TOP. По определению colim является левым сопряженным функтору постоянной диаграммы. В явном виде,

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{I}=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}\Bigl(\prod_{i\in I}X_i\times\prod_{i\notin I}A_i\Bigr)\subset\prod_{i=1}^{m}X_i.$$

Когда каждое A_i является точкой, мы используем сокращенное обозначение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ для $(\boldsymbol{X},pt)^{\mathcal{K}}$.

Полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ можно определить в любой симметрической моноидальной категории C с конечными копределами. Рассмотрим последовательность объектов $\boldsymbol{X}=(X_1,\dots,X_m)$ в C, положим $\boldsymbol{X}^{I}=\prod_{i\in I}X_i$, где произведение берётся в моноидальной структуре, и рассмотрим диаграмму

$$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X})\colon\ \mathrm{CAT}(\mathcal{K})\longrightarrow \mathrm{C},\qquad I\longmapsto \boldsymbol{X}^{I},$$

которая переводит морфизм $I\subset J$ в канонический морфизм $\boldsymbol{X}^{I}\to\boldsymbol{X}^{J}$. Последний определяется с использованием единичного объекта в C. Определим полиэдральное произведение

$$\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}=\operatorname{colim}^{\mathrm{C}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\boldsymbol{X})=\operatorname{colim}^{\mathrm{C}}_{I\in\mathcal{K}}\boldsymbol{X}^{I}. \tag{2.1}$$

Полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\partial\Delta_{[m]}}$ топологических пространств с отмеченной точкой $X_1,\dots,X_m$ известно как *толстый букет*. При $m=2$ это обычный букет $X_1\vee X_2$.

Во многих категориях полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\partial\Delta_{[m]}}$ не отличается от $\boldsymbol{X}^{\Delta_{[m]}}=\prod_{i=1}^{m}X_i$. Категории с полиэдральным произведением, в которых канонический морфизм

$$\boldsymbol{X}^{\partial\Delta_{[m]}}\to\prod_{i=1}^{m}X_i$$

является изоморфизмом для любых объектов $X_1,\dots,X_m$ и $m\geqslant 3$ называются *толстыми* и были впервые рассмотрены в статье [PR24].

Примеры толстых категорий включают

- GRP: группы (моноидальное произведение — декартово произведение, копроизведение — свободное произведение);
- TMN: топологические моноиды (моноидальное произведение — декартово произведение, копроизведение — свободное произведение);
- TGP: топологические группы (полная подкатегория в TMN);
- ASS: ассоциативные алгебры с единицей над коммутативным кольцом R (моноидальное произведение — тензорное произведение, копроизведение — свободное произведение);
- LIE: алгебры Ли над R (моноидальное произведение — прямая сумма, копроизведение — свободное произведение).

В каждой из этих категорий набор попарно коммутирующих элементов группы (алгебры) порождает коммутативную подгруппу (подалгебру). С другой стороны, категория TOP не является толстой.

Предложение 2.2. *В толстой категории* C *морфизм* $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}^1} \to \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ *является изоморфизмом для любого симплициального комплекса* $\mathcal{K}$ *и последовательности объектов* $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_m)$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по числу симплексов I комплекса $\mathcal{K}$ с $|I| \geqslant 3$. Предположим, $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup I$, где $|I| \geqslant 3$. Имеем кодекартов квадрат симплициальных комплексов и соответствующий кодекартов квадрат полиэдральных произведений:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^I & \longrightarrow & \Delta^I \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}' & \longrightarrow & \mathcal{K}, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}^{\partial\Delta^I} & \longrightarrow & \boldsymbol{X}^{\Delta^I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}'} & \longrightarrow & \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}. \end{array}$$

Поскольку $\boldsymbol{X}^{\partial\Delta^I} \to \boldsymbol{X}^{\Delta^I}$ является изоморфизмом, $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}'} \to \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ также является изоморфизмом. □

Для последовательности $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ объектов из C и конечного простого графа Γ с m вершинами *граф-произведение* $\boldsymbol{X}^{\Gamma}$ определяется как полиэдральное произведение $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}(\Gamma)}$. Согласно предложению 2.2, если категория C толстая, то $\boldsymbol{X}^{\Gamma} = \boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}$ для любого $\mathcal{K}$ с $\mathcal{K}^1 = \Gamma$.

Пример 2.3 (граф-произведение групп)**.** Пусть $\boldsymbol{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ — последовательность из m (топологических) групп. Поскольку категория TGP толстая, имеем

$$\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}^1} = \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\mathrm{TGP}}_{I \in \mathcal{K}} \boldsymbol{G}^I.$$

При $\mathcal{K} = \{1, 2\}$ – дизъюнктном объединении двух вершин получаем $G_1 \to \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}^1}$ и $G_2 \to \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}^1}$, так что любой другой гомоморфизм $G_i \to H$ пропускается через $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}^1}$. Рассматривая тождественное $G_i \xrightarrow{id} G_i$ получаем, что $G_i \hookrightarrow \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}^1}$ и $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}^1} = \bigstar_{k=1}^{2} G_k$, где $\bigstar_{k=1}^{m} G_k$ обозначает свободное произведение групп G_k. При $\mathcal{K} = \Delta_2 = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ – двух вершинах соединенных ребром имеем $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}^1} = G_1 \times G_2 = \Big(G_1 \bigstar G_2\Big) / (g_1 g_2 = g_2 g_1)$.

В общем случае,

$$\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} = \mathop{\bigstar}_{k=1}^{m} G_k \big/ (g_i g_j = g_j g_i \text{ при } g_i \in G_i,\ g_j \in G_j,\ \{i, j\} \in \mathcal{K}),$$

Существуют канонические инъективные гомоморфизмы $\boldsymbol{G}^I \to \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ для $I \in \mathcal{K}$.

Далее будут рассмотрены примеры, когда функтор между двумя категориями сохраняет граф-произведения. Это, безусловно, имеет место, когда функтор сохраняет конечные произведения и копределы. Другие примеры включают функтор классифицирующего пространства и функтор гомологий петель, рассматриваемые ниже.

Для топологической группы G рассмотрим универсальное G-расслоение $EG \to BG$, где EG — универсальное G-пространство, а BG — классифицирующее пространство для G.

Следуя обозначениям из примера 2.3, классифицирующее пространство $B\boldsymbol{G}^I$ является произведением пространств BG_i с $i \in I$. Таким образом, мы имеем полиэдральное произведение $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$, соответствующее последовательности пар

$$(B\boldsymbol{G}, pt) = \{(BG_1, pt), \ldots, (BG_m, pt)\}.$$

Аналогично последовательности пар $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G}) = \{(EG_1, G_1), \ldots, (EG_m, G_m)\}$ соответствует полиэдральное произведение $(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$. Здесь G_i содержится в EG_i как слой над отмеченной точкой расслоения $EG_i \to BG_i$.

Предложение 2.4 ([PR08, Proposition 5.1], [BP15, с. 4.3.10]). *Существует гомотопическое расслоение полиэдральных произведений*

$$(E\boldsymbol{G}, \boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} \longrightarrow (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} BG_i. \tag{2.2}$$

Функтор классифицирующего пространства

$$B\colon \text{TGP} \to \text{TOP}$$

вообще говоря, не сохраняет копределы над малыми категориями, но он сохраняет *гомотопические копределы* при соответствующих модельных структурах на TOP и TGP, см. [PR08, Theorem 7.12]. Следующее утверждение описывает взаимосвязь между полиэдральными произведениями пространств и граф-произведениями групп.

Теорема 2.5 ([PR08, Proposition 6.1, Theorem 7.17]). *Существует коммутативный квадрат естественных отображений*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{hocolim}^{\text{TOP}}_{I\in\mathcal{K}} B\boldsymbol{G}^I \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"] & B\operatorname{hocolim}^{\text{TGP}}_{I\in\mathcal{K}} \boldsymbol{G}^I \arrow[d] \\
\operatorname{colim}^{\text{TOP}}_{I\in\mathcal{K}} B\boldsymbol{G}^I \arrow[r] & B\operatorname{colim}^{\text{TGP}}_{I\in\mathcal{K}} \boldsymbol{G}^I
\end{tikzcd}$$

в TOP, *где верхнее и левое отображения являются гомотопическими эквивалентностями, а правое отображение является гомотопической эквивалентностью в случае, когда $\mathcal{K}$ является флаговым комплексом.*

Следствие 2.6. *Естественное отображение*

$$(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} \to B(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}})$$

является гомотопической эквивалентностью, когда $\mathcal{K}$ является флаговым комплексом. Другими словами, функтор классифицирующего пространства сохраняет граф-произведения с точностью до гомотопической эквивалентности.

Следствие 2.7. *Если $\mathcal{K}$ флаговый и $\boldsymbol{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ состоит из дискретных групп, то полиэдральное произведение $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ является асферическим пространством с $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}) = \boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$.*

Замечание. Асферичность $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ для дискретного $\boldsymbol{G}$ и флагового $\mathcal{K}$ может быть доказана с помощью стандартной техники Уайтхеда склеивания асферических пространств. Для этого используется индукция по числу вершин m, разложение $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\mathrm{TOP}}_{I \subsetneq [m]} (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_I}$ и тот факт, что полный подкомплекс $\mathcal{K}_I$ во флаговом комплексе является флаговым. Инъективность гомоморфизма $\pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_I}) \to \pi_1((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}})$ следует из того, что $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}_I}$ является ретрактом $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ [ПВ16, предложение 2.2]. Этот аргумент изложен в [KR80, Theorem 10] для случая прямоугольных групп Артина.

Пример 2.8. В этих примерах $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс.

1. Пусть $G_i = \mathbb{Z}$ — группа целых чисел для $i = 1, \ldots, m$. Соответствующее граф-произведение известно как *прямоугольная группа Артина* или *частично коммутативная группа*, соответствующая $\mathcal{K}$ (или графу $\mathcal{K}^1$). Она определяется следующим образом:

$$RA_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}^{\mathcal{K}} = F(a_1, \ldots, a_m) \big/ \big(a_i a_j = a_j a_i \text{ при } \{i, j\} \in \mathcal{K}\big), \tag{2.3}$$

где $F(a_1, \ldots, a_m)$ обозначает свободную группу на m образующих. Классифицирующим пространством группы $RA_{\mathcal{K}}$ является полиэдральное произведение $(B\mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = (S^1)^{\mathcal{K}}$, подкомплекс в m-мерном торе $T^m = (S^1)^m$. Гомотопическое расслоение (2.2) в TOP приобретает вид

$$(\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}} \longrightarrow (S^1)^{\mathcal{K}} \longrightarrow (S^1)^m;$$

оно состоит из асферических пространств. Переходя к фундаментальным группам, мы получаем короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow RA'_{\mathcal{K}} \longrightarrow RA_{\mathcal{K}} \xrightarrow{Ab} \mathbb{Z}^m \longrightarrow 1,$$

где Ab — отображение абелианизации, а $RA'_{\mathcal{K}}$ — коммутант.

2. Пусть $G_i = \mathbb{Z}_2$ — циклическая группа порядка 2 для $i = 1, \ldots, m$. Соответствующее граф-произведение известно как *прямоугольная группа Коксетера*, соответствующая $\mathcal{K}$:

$$RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2^{\mathcal{K}} = F(a_1, \ldots, a_m) \big/ \big(a_i^2 = 1,\ a_i a_j = a_j a_i \text{для } \{i, j\} \in \mathcal{K}\big). \tag{2.4}$$

Классифицирующим пространством группы $RC_{\mathcal{K}}$ является полиэдральное произведение $(B\mathbb{Z}_2)^{\mathcal{K}} = (\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}$. Полиэдральное произведение $(E\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)^{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентно *вещественному момент-угол комплексу* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$, где D^1 — отрезок, а S^0 — его граница. Гомотопическое расслоение (2.2) в TOP приобретает вид

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{R}P^\infty)^m$$

и состоит из асферических пространств. Переходя к фундаментальным группам, мы получаем короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow RC'_{\mathcal{K}} \longrightarrow RC_{\mathcal{K}} \xrightarrow{Ab} (\mathbb{Z}_2)^m \longrightarrow 1. \tag{2.5}$$

3. Будем обозначать через T или T^1 окружность как объект в TGP, а через S^1 окружность как объект в TOP. Пусть $G_i = T^1$ для $i = 1, \dots, m$. Соответствующее граф-произведение является копределом торов T^I в категории топологических групп; оно называется *циркуляционной группой* [PR08]:

$$Cir_{\mathcal{K}} = T^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\text{TGP}}_{I \in \mathcal{K}} T^I.$$

Классифицирующим пространством этой группы является полиэдральное произведение $(BT^1)^{\mathcal{K}} = (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$, известное как *пространство Дэвиса–Янушкевича*. Полиэдральное произведение $(ET^1, T^1)^{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентно *момент-угол-комплексу* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$, где D^2 — 2-диск. Гомотопическое расслоение (2.2) приобретает вид

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^m.$$

Применяя функтор пространства петель Мура $\Omega\colon$ TOP $\to$ TMN к расслоению выше, получим коммутативную диаграмму в гомотопической категории Ho(TMN)

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & T^m \arrow[d, equal] & \\
1 \arrow[r] & Cir'_{\mathcal{K}} \arrow[r] & Cir_{\mathcal{K}} \arrow[r, "Ab"] & T^m \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

где $Cir'_{\mathcal{K}}$ — топологическая подгруппа-коммутант в $Cir_{\mathcal{K}}$. Нижняя строка является короткой точной последовательностью в TGP и аналогична (2.5).

4. В более общем случае, пусть G_i — моноид петель Мура ΩX_i односвязного пространства X_i, $i = 1, \dots, m$. Применяя функтор Ω к гомотопической эквивалентности из следствия 2.6, получаем для флагового $\mathcal{K}$ эквивалентность

$$\Omega(\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}) \simeq (\Omega\boldsymbol{X})^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\text{TMN}}_{I \in \mathcal{K}} (\Omega\boldsymbol{X})^I$$

в Ho(TMN). Это выражает тот факт, что функтор петель Мура сохраняет граф произведения с точностью до гомотопии.

Для коммутативного кольца R с единицей гомологии петель $H_*(\Omega X; R)$ односвязного пространства X являются алгеброй Хопфа по отношению к некоммутативному произведению Понтрягина и кокоммутативному диагональному отображению гомологий. Мы получаем функтор $H_*\Omega\colon$ TOP $\to$ HPF, или TOP $\to$ ASS, забывая о структуре коалгебры.

Для последовательности ассоциативных алгебр $\boldsymbol{A} = (A_1, \dots, A_m)$ полиэдральное произведение

$$\boldsymbol{A}^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\text{ASS}}_{I \in \mathcal{K}} \Big(\bigotimes_{i \in I} A_i \Big)$$

также является граф-произведением, так как категория ASS является толстой.

Теорема 2.9 ([Dob09, Corollary 1.2]). *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)$ — последовательность односвязных пространств, а R — поле. Существуют изоморфизмы*

$$H_*\big(\Omega(\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}}); R\big) \cong (H_*(\Omega\boldsymbol{X}; R))^{\mathcal{K}} \cong$$
$$\cong \mathop{\bigstar}_{k=1}^{m} H_*(\Omega X_i)\big/\big([x_i, x_j] = 0 \text{ при } x_i \in H_*(\Omega X_i),\ x_j \in H_*(\Omega X_j),\ \{i,j\} \in \mathcal{K}\big)$$

градуированных R-алгебр, где $[x_i, x_j] = x_i x_j - (-1)^{|x_i||x_j|} x_j x_i$. То есть, функтор гомологий петель $H_*\Omega\colon$ TOP $\to$ ASS с коэффициентами в поле сохраняет граф-произведения.

Особое значение имеют случаи $X_i = S^{2p+1}$ (нечетномерная сфера) и $X_i = \mathbb{C}P^\infty$. Соответствующие гомологии петель $H_*(\Omega S^{2p+1}; R) = R[v]$ — полиномиальная (симметрическая) алгебра с одной образующей v степени $2p$. Для флагового $\mathcal{K}$ граф-произведение алгебр $H_*(\Omega(S^{2p+1})^{\mathcal{K}}; R)$ является алгебраическим аналогом прямоугольной группы Артина (2.3).

Теорема 2.10 ([BG11]). *Для любого флагового комплекса $\mathcal{K}$ и $p \geqslant 1$ существуют изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H_*\big(\Omega(S^{2p+1})^{\mathcal{K}}; R\big) &\cong R[v]^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\text{ASS}}_{I\in\mathcal{K}} R[v_i\colon i \in I] \\ &\cong T(v_1, \dots, v_m)/(v_i v_j - v_j v_i = 0 \text{ для } \{i,j\} \in \mathcal{K}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

градуированных R-алгебр, где $T(v_1, \dots, v_m)$ — свободная ассоциативная алгебра, а $R[v_i\colon i \in I]$ — полиномиальная алгебра и $|v_i| = 2p$.

Аналогично, алгебра $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; R)$ связана с прямоугольными группами Коксетера. Чтобы прояснить это, рассмотрим внешнюю алгебру

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^m; R) = H(T^m; R) = \Lambda[u_1, \dots, u_m],$$

где $|u_i| = 1$. Из гомотопического расслоения (2.6) получаем короткую точную последовательность алгебр гомологий петель [BP15, Proposition 8.4.1]

$$0 \longrightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; R) \longrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; R) \longrightarrow \Lambda[u_1, \dots, u_m] \longrightarrow 0, \tag{2.8}$$

то есть $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; R) \subset H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; R)$ является нормальной подалгеброй [MM65] и

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; R) /\!/ H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; R) = \Lambda[u_1, \dots, u_m].$$

По аналогии с (2.5) можно рассматривать $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; R)$ как *подалгебру-коммутант* в $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; R)$ или как ядро отображения абелианизации из некоммутативной алгебры $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; R)$.

Теорема 2.11 ([ПВ16, Theorem 9.3], [BP15, Theorem 8.5.2, Corollary 8.5.3]). *Для любого флагового комплекса $\mathcal{K}$ существуют изоморфизмы*

$$\begin{aligned} H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; R) &\cong \Lambda[u]^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\text{ASS}}_{I\in\mathcal{K}} \Lambda[u_i\colon i \in I] \\ &\cong T(u_1, \dots, u_m)/(u_i^2 = 0,\ u_i u_j + u_j u_i = 0 \text{ для } \{i,j\} \in \mathcal{K}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

градуированных R-алгебр, где $\Lambda[u_i\colon i \in I]$ — внешняя алгебра и $|u_i| = 1$.

Разложение градуированной алгебры $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K};R)$ в копредел (2.9) аналогично разложению прямоугольной группы Коксетера в копредел $RC_\mathcal{K} = \operatorname{colim}^{\text{GRP}}_{I\in\mathcal{K}} \mathbb{Z}_2^I$. Эту аналогию можно продолжить, рассмотрев коммутанты и подалгебры-коммутанты. Будем обозначать групповой коммутатор $g^{-1}h^{-1}gh$ через (g,h) и градуированный алгебраический коммутатор $uv-(-1)^{|u||v|}vu$ через $[u,v]$.

Теорема 2.12 ([ПВ16, теорема 4.5])**.** *Коммутант $RC'_\mathcal{K}$ имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из $\sum_{J\subset[m]}\operatorname{rank}\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ вложенных коммутаторов вида*

$$(g_j,g_i),\quad (g_{k_1},(g_j,g_i)),\quad \ldots,\quad (g_{k_1},(g_{k_2},\cdots(g_{k_{m-2}},(g_j,g_i))\cdots)),$$

где $k_1<k_2<\cdots<k_{\ell-2}<j>i$, $k_s\neq i$ для любого s, и i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_{\ell-2},j,i\}}$, не содержащей j.

Теорема 2.13 ([Grb+15, Theorem 4.3])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, а R — поле. Алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};R)$, рассматриваемая как подалгебра-коммутант в $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K};R)$ при помощи точной последовательности (2.8), мультипликативно порождается $\sum_{J\subset[m]}\operatorname{rank}\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ вложенными коммутаторами вида*

$$[u_j,u_i],\quad [u_{k_1},[u_j,u_i]],\quad \ldots,\quad [u_{k_1},[u_{k_2},\cdots[u_{k_{m-2}},[u_j,u_i]]\cdots]],$$

где $k_1<k_2<\cdots<k_p<j>i$, $k_s\neq i$ для любого s, а i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_p,j,i\}}$, не содержащей j. Более того, данное мультипликативно порождающее множество минимально, т. е. приведённые выше коммутаторы образуют базис в подмодуле неразложимых элементов в алгебре $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};R)$.

3. Центральные фильтрации и ассоциированные алгебры Ли

Алгебра Ли над коммутативным унитарным кольцом R — это R-модуль L вместе с R-линейным отображением $L\times L\to L$, $(x,y)\mapsto[x,y]$, удовлетворяющим (1) $[x,x]=0$ и (2) тождеству Якоби $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ для всех $x,y,z\in L$. Из условия (1) следует, что $[x,y]=-[y,x]$.

Рассмотрим функтор $\mathcal{L}\colon \text{ASS}\to\text{LIE}$, переводящий ассоциативную R-алгебру A в алгебру Ли $\mathcal{L}A$ на том же R-модуле со скобкой Ли $[x,y]=xy-yx$. Функтор $\mathcal{L}$ имеет левый сопряженный $\mathcal{U}\colon\text{LIE}\to\text{ASS}$:

$$\operatorname{Hom}_{\text{ASS}}(\mathcal{U}L,A)=\operatorname{Hom}_{\text{LIE}}(L,\mathcal{L}A).$$

Ассоциативная алгебра $\mathcal{U}L$ вместе с каноническим гомоморфизмом алгебр Ли $L\to\mathcal{L}\mathcal{U}L$ называется *универсальной обертывающей алгеброй* для L. В явном виде $\mathcal{U}L$ — это факторалгебра алгебры TL (свободной ассоциативной алгебры на L) по двустороннему идеалу, порожденному элементами $xy-yx-[x,y]$, $x,y\in L$. Если L — свободный R-модуль, то гомоморфизм $L\to\mathcal{L}\mathcal{U}L$ инъективен [Ser06, следствие III.1].

Пусть G — группа (при необходимости рассматриваемая как объект в TGP с дискретной топологией). Если даны две подгруппы H и W в G, обозначим через (H,W)

подгруппу, порожденную всеми коммутаторами (h, w), где $h \in H$ и $w \in W$. В частности, $(G, G) = G'$ — коммутант.

(Убывающая) *центральная фильтрация* или *центральный ряд* на G — это последовательность подгрупп $\Gamma(G) = \{\Gamma_k(G) \colon k \geqslant 1\}$ таких, что $\Gamma_1(G) = G$, $\Gamma_{k+1}(G) \subset \Gamma_k(G)$ и $(\Gamma_k(G), \Gamma_l(G)) \subset \Gamma_{k+\ell}(G)$ для любых k, ℓ. Отсюда сразу следует, что каждая $\Gamma_k(G)$ является нормальной подгруппой, а факторгруппа $\Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$ является абелевой.

Самый быстро убывающий центральный ряд — это *нижний центральный ряд* $\gamma(G)$, заданный как $\gamma_1(G) = G$ и $\gamma_k(G) = (\gamma_{k-1}(G), G)$ для $k \geqslant 2$.

Ассоциированной (или присоединённой) алгеброй Ли центральной фильтрации $\Gamma(G)$ называется ассоциированная градуированная абелева группа

$$\operatorname{gr}_\bullet \Gamma(G) = \bigoplus_{k \geqslant 1} \Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$$

со скобкой Ли, заданной как

$$[\overline{g}_k, \overline{g}_\ell] = \overline{(g_k, g_\ell)},$$

где $\overline{g}_k$ обозначает образ $g_k \in \Gamma_k(G)$ в факторгруппе $\Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$.

Согласно классическому результату Магнуса [MKC74, теорема 5.12] алгебра Ли, ассоциированная с нижней центральной фильтрацией свободной группы $F(a_1, \ldots, a_m)$, является *свободной алгеброй Ли* $FL(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m)$ над $\mathbb{Z}$. Имеется следующее обобщение на прямоугольные группы Артина.

Теорема 3.1 ([DK92b], см. также [Wad16]). *Алгебра Ли, ассоциированная с нижней центральной фильтрацией прямоугольной группы Артина $RA_{\mathcal{K}}$, имеет вид*

$$\operatorname{gr}_\bullet \gamma(RA_{\mathcal{K}}) \cong FL(v_1, \ldots, v_m)/\big([v_i, v_j] = 0 \text{ для } \{i, j\} \in \mathcal{K}\big). \tag{3.1}$$

Кроме того, каждая компонента $\operatorname{gr}_k \gamma(RA_{\mathcal{K}})$ является свободной абелевой группой.

Алгебра Ли (над $\mathbb{Z}$) в правой части (3.1) известна как *граф-алгебра Ли*, или *частично коммутативная алгебра Ли*. Она представляет собой граф-произведение $\mathbb{Z}\langle v\rangle^{\mathcal{K}}$ тривиальных алгебр Ли $\mathbb{Z}\langle v\rangle = FL(v)$. Поскольку алгебра (3.1) свободна как абелева группа, она является алгеброй Ли примитивных элементов в $\mathcal{U}(\operatorname{gr}_\bullet \gamma(RA_{\mathcal{K}}))$ [Ser06, теорема III.5.4]. Поскольку функтор универсальной обертывающей $\mathcal{U} \colon \textsc{lie} \to \textsc{ass}$ является левым сопряжённым и сохраняет произведения, он также сохраняет граф-произведения. Поэтому $\mathcal{U}(\operatorname{gr}_\bullet \gamma(RA_{\mathcal{K}}))$ является алгеброй (2.7) для $R = \mathbb{Z}$. Получаем

Предложение 3.2. *Для флагового комплекса $\mathcal{K}$ существует изоморфизм*

$$\mathcal{U}(\operatorname{gr}_\bullet \gamma(RA_{\mathcal{K}})) \cong H_*(\Omega(S^{2p+1})^{\mathcal{K}}; \mathbb{Z})$$

ассоциативных $\mathbb{Z}$-алгебр, где $p \geqslant 1$.

Чтобы изоморфизм из предложения 3.2 был согласован с градуировкой в алгебре $H_*(\Omega(S^{2p+1})^{\mathcal{K}}; \mathbb{Z})$, необходимо положить $\deg v_i = 2p$.

Нижняя центральная фильтрация прямоугольной группы Коксетера $RC_{\mathcal{K}}$ устроена более сложно [Ver22; VR24]. Имеет место включение $(\gamma_k(RC_{\mathcal{K}}))^2 \subset \gamma_{k+1}(RC_{\mathcal{K}})$, так что $\mathrm{gr}_{\bullet}\,\gamma(RC_{\mathcal{K}})$ — алгебра Ли над $\mathbb{Z}_2$. Существует эпиморфизм

$$FL_{\mathbb{Z}_2}(v_1, \ldots, v_m) / \big([v_i, v_j] = 0 \text{ для } \{i,j\} \in \mathcal{K}\big) \to \mathrm{gr}_{\bullet}\,\gamma(RC_{\mathcal{K}})$$

алгебр Ли над $\mathbb{Z}_2$, где $FL_{\mathbb{Z}_2}(v_1, \ldots, v_m) = FL(v_1, \ldots, v_m) \otimes \mathbb{Z}_2$. Это эпиморфизм не является изоморфизмом уже в случае, когда $\mathcal{K}$ — две отдельные точки и $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_2$.

Для групп Кокстера изучался метод Магнуса, который подразумевает изучение отображения Магнуса $\mu : RC_{\mathcal{K}} \to \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)^{\times}$ из $RC_{\mathcal{K}}$ в мультипликативную группу ассоциативной алгебры. Отображение задано на образующих как $v_i \mapsto 1 + u_i$. Рассматриваемая в методе ассоциативная алгебра имеет копредставление, в котором нельзя избавиться от какого-либо соотношения, так, чтобы отображение оставалось корректно определенным

$$\left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)^{\times} \simeq T_{\mathbb{Z}_2}(u_1, \ldots, u_m)/(u_i^2 = 0,\ u_iu_j + u_ju_i = 0 \textit{ для } \{i,j\} \in \mathcal{K})).$$

Элементы вида $1 + u_i$ в $\left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)^{\times}$ порождают подгруппу изоморфную $RC_{\mathcal{K}}$. Было показано [VR24], что указанное отображение μ индуцирует корректное отображение между алгебрами Ли $\mathrm{gr}_{\bullet}\,\gamma(RC_{\mathcal{K}})$ и $\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}$. Следующие свойства отображения Магнуса оказались полезны для вычисления $\mathrm{gr}_4\,\gamma(RC_{\mathcal{K}})$.

Обозначим $\mu(x)^i$ — компоненту градуировки i в образе $\mu(x)$.

Теорема 3.3 ([VR24]). *Пусть $x \in \gamma_k(RC_{\mathcal{K}})$, тогда:*

(1) $\mu(x)^i = 0$, *при* $0 < i < k$
(2) *Если* $x = (\ldots(v_{i_1}, v_{i_2}), \ldots, v_{i_k}) \in RC_{\mathcal{K}}$ *- простой вложенный коммутатор длины k, то* $\mu(x)^k = [\ldots[v_{i_1}, v_{i_2}]\ldots, v_{i_k}]$

Доказательство. Рассматривая градуированную алгебру $\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}$ будем обозначать $\left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{\geqslant k}$ элементы состоящие из мономов градуировки k и выше. В таком случае $1 + \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{\geqslant k}$ — двусторонний идеал в $\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}$. Определим $D_k = \{a \in RC_{\mathcal{K}} : \mu(a) - 1 \in \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{\geqslant k}\}$. Тогда для доказательства первого утверждения достаточно доказать что $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ — центральный ряд для $RC_{\mathcal{K}}$, так как в таком случае $\gamma_i \subset D_i$.

Рассмотрим мультипликативную группу: $(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}})^{\times}$ элементов со свободным членом равным 1. Тогда $1 + \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{\geqslant k}$ можно рассматривать как подгруппы $(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}})^{\times}$, а согласно [Бур72, гл. 2, §4, п.5] фильтрация $\{1 + \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{\geqslant k}\}$ является центральным рядом для $(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}})^{\times}$.

Далее, пусть $M \simeq RC_{\mathcal{K}}$ - подгруппа $(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}})^{\times}$ порожденная элементами вида $1 + u_i$, с индуцированной из $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ фильтрацией $M_k = \mu(D_k) \subset 1 + \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{\geqslant k}$. Тогда с одной стороны

$$(M_k, M_l) \subset (1 + \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{\geqslant k},\ \ 1 + \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{>l}) \subset 1 + \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{>k+l},$$

с другой стороны $(M_k, M_l) < M$, откуда $(M_k, M_l) < M_{k+l}$. Таким образом $\{M_k\}_{i=1}^{\infty}$ - центральный ряд на M, а значит $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ - центральный ряд на $RC_{\mathcal{K}}$.

Второй пункт теоремы докажем индукцией по длине коммутатора. База индукции:

$$\mu((v_i, v_j)) = \mu(v_iv_jv_iv_j) = (1+v_i)(1+v_j)(1+v_i)(1+v_j) = \\ = 1 + v_iv_j + v_jv_i + v_jv_iv_j + v_iv_jv_i + v_iv_jv_iv_j$$

Откуда $\mu((v_i, v_j))^2 = v_iv_j + v_jv_i = [v_i, v_j]$, а $\mu((v_i, v_j))^3 = v_jv_iv_j + v_iv_jv_i$ - имеет симметричную запись.

Далее, пусть по предположению индукции

$$\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})) = 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + u^{>k+1},$$

где $u^{k+1} \in \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{k+1}$ имеет симметричную запись, а $u^{>k+1} \in \left(\Lambda_{\mathbb{Z}_2}[u]^{\mathcal{K}}\right)_{\geqslant k+2}$. Из симметричности записи следует что $\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})^{-1}) = 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + \tilde{u}^{>k+1}$. Далее прямым вычислением:

$$\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}})) = \mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})^{-1}v_{i_{k+1}}^{-1}(v_{i_1}, ..., v_{i_k})v_{i_{k+1}}) = \\ = (1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + \tilde{u}^{>k+1})(1 + v_{i_{k+1}}) \cdot \\ \cdot (1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + u^{>k+1})(1 + v_{i_{k+1}}) = \\ = 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}]v_{i_{k+1}} + v_{i_{k+1}}[v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1}v_{i_{k+1}} + v_{i_{k+1}}u^{k+1} + u^{>k+2} = \\ = 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}] + u^{k+1}v_{i_{k+1}} + v_{i_{k+1}}u^{k+1} + u^{>k+2}$$

получаем что $\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}))^{k+1} = [v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}]$ и $\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}))^{k+2}$ - симметричные выражения. $\square$

Правильный аналог предложения 3.2 для прямоугольных групп Коксетера получается при изучении нижней 2-центральной фильтрации и ассоциированной с ней ограниченной алгебры Ли.

4. Ограниченные алгебры Ли и p-центральные ряды

Пусть p — простое число, а R — поле характеристики p или, в более общем случае, коммутативная алгебра над $\mathbb{Z}_p$. *Ограниченной алгеброй Ли* над R, или *p-алгеброй Ли*, называется алгебра Ли L над R, снабженная операцией *p-степени*: $x \mapsto x^{[p]}$, удовлетворяющей следующим свойствам:

(1) $[x, y^{[p]}] = [\dots[[x, \underbrace{y], y], \dots, y}_{p}]$ для $x, y \in L$;

(2) $(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}$ для $x \in L$ и $\alpha \in R$;

(3) $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y),$

где $s_i(x,y)$ определяется из разложения

$$[\dots[[x, \underbrace{\lambda x + y], \lambda x + y], \dots, \lambda x + y}_{p-1}] = \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(x,y)\lambda^{i-1}$$

для $x, y \in L$ и $\lambda \in R$.

Например, если $p = 2$, то $(x+y)^{[2]} = x^{[2]} + y^{[2]} + [x,y]$, а если $p = 3$, то $(x+y)^{[3]} = x^{[3]} + y^{[3]} + [[x,y],y] - [[x,y],x]$.

Любая ассоциативная алгебра A над R является ограниченной алгеброй Ли со скобкой-коммутатором $[x,y] = xy - yx$ и операцией p-степени $x \mapsto x^p$. Это задает функтор $\mathcal{L}_p\colon \text{ASS} \to \text{LIE}_p$ в категорию ограниченных алгебр Ли над R. Левый сопряженный функтор $\mathcal{U}_p\colon \text{LIE}_p \to \text{ASS}$ определяет *ограниченную универсальную обертывающую алгебру* $\mathcal{U}_p L$ для L вместе с каноническим гомоморфизмом $L \to \mathcal{L}_p\mathcal{U}_p L$ ограниченных алгебр Ли. В явном виде $\mathcal{U}_p L$ — это факторалгебра свободной ассоциативной алгебры TL по двустороннему идеалу, порожденному элементами $x^p - x^{[p]}$ и $xy - yx - [x,y]$, $x, y \in L$. Если L — свободный R-модуль (например, если R — поле характеристики p), то гомоморфизм $L \to \mathcal{L}_p\mathcal{U}_p L$ инъективен [Jac79, теорема V.12].

Лемма 4.1 ([Qui68, Lemma 2.1])**.** *Пусть $f\colon L_1 \to L_2$ — гомоморфизм R-свободных p-алгебр Ли. Тогда гомоморфизм f сюръективен (инъективен) тогда и только тогда когда $\mathcal{U}_p f : \mathcal{U}_p L_1 \to \mathcal{U}_p L_2$ сюръективен (инъективен).*

Если задано множество S, то *свободная p-алгебра Ли $FL_p(x_s\colon s \in S)$*, порожденная S, определяется универсальным свойством: любое отображение множеств $S \to L$ в ограниченную алгебру Ли L однозначно продолжается до гомоморфизма $FL_p(x_s\colon s \in S) \to L$ ограниченных алгебр Ли.

Предложение 4.2 ([Бах85, §2.7.1])**.** *Если W представляет собой R-базис свободной алгебры Ли $FL(x_s\colon s \in S)$, то $\{w^{p^i}\colon w \in W, i = 1, 2, \dots\}$ — R-базис свободной ограниченной алгебры Ли $FL_p(x_s\colon s \in S)$.*

Пусть $\mathcal{P}\colon \text{HPF} \to \text{LIE}_p$ обозначает функтор примитивных элементов из категории алгебр Хопфа над R.

Предложение 4.3. *$\mathcal{U}_p FL_p(x_s\colon s \in S) \cong T(x_s\colon s \in S)$ и $FL_p(x_s\colon s \in S) \cong \mathcal{P}T(x_s\colon s \in S)$.*

Доказательство. Первое утверждение является формальным следствием универсальных свойств. А именно, отображение множества $S \to A$ в ассоциативную алгебру A однозначно продолжается до гомоморфизма $FL_p(x_s\colon s \in S) \to \mathcal{L}_p A$ ограниченных алгебр Ли. Последний однозначно продолжается до гомоморфизма $\mathcal{U}_p FL_p(x_s\colon s \in S) \to A$ ассоциативных алгебр. Следовательно, алгебра $\mathcal{U}_p FL_p(x_s\colon s \in S)$ обладает универсальным свойством свободного объекта в ASS, поэтому она канонически изоморфна $T(x_s\colon s\in S)$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что $\mathcal{U}FL(x_s\colon s\in S)=T(x_s\colon s\in S)$. Пусть W — базис R-модуля $FL(x_s\colon s\in S)$. Из [Ser06, теорема III.5.4, упражнение 2] следует, что $\{w^{p^i}\colon w\in W,\ i=1,2,\ldots\}$ является базисом R-модуля $\mathcal{P}T(x_s\colon s\in S)$. Он также является базисом R-модуля $FL_p(x_s\colon s\in S)$ согласно предложению 4.2, из чего вытекает требуемое. □

Равенство $\mathcal{P}\mathcal{U}_pL=L$ имеет место для любой R-свободной p-алгебры Ли L [MM65, Theorem 6.11].

За более подробной информацией о p-алгебрах Ли мы отсылаем к монографиям [Jac79] и [Бах85].

Назовём *p-центральной фильтрацией* или *p-центральным рядом* [Laz54; Qui68] на группе G центральный ряд $\mathit{\Gamma}^{[p]}(G)=\{\mathit{\Gamma}^{[p]}_k(G)\colon k\geqslant 1\}$ такой, что если $g\in\mathit{\Gamma}^{[p]}_k(G)$, то $g^p\in\mathit{\Gamma}^{[p]}_{pk}(G)$, для любого k. Последовательные факторы $\mathit{\Gamma}^{[p]}_k(G)/\mathit{\Gamma}^{[p]}_{k+1}(G)$ являются элементарными абелевыми p-группами ($\mathbb{Z}_p$-модулями).

Самый быстро убывающий p-центральный ряд — это *нижний p-центральный ряд* $\gamma^{[p]}(G)$, определяемый как $\gamma^{[p]}_1(G)=G$ и $\gamma^{[p]}_k(G)=\big(\gamma^{[p]}_{k-1}(G),G\big)\big(\gamma^{[p]}_{\lceil k/p\rceil}\big)^p$ для $k\geqslant 2$. Более явно,

$$\gamma^{[p]}_k(G)=\prod_{mp^i\geqslant k}\big(\gamma_m(G)\big)^{p^i}.$$

Ассоциированный градуированный $\mathbb{Z}_p$-модуль

$$\operatorname{gr}_\bullet \mathit{\Gamma}^{[p]}(G)=\bigoplus_{k\geqslant 1}\mathit{\Gamma}^{[p]}_k(G)/\mathit{\Gamma}^{[p]}_{k+1}(G)$$

p-центральной фильтрации $\mathit{\Gamma}^{[p]}(G)$ является ограниченной алгеброй Ли над $\mathbb{Z}_p$ со скобкой и p-степенью, определяемыми как

$$[\overline{g}_k,\overline{g}_\ell]=\overline{(g_k,g_\ell)},\quad (\overline{g}_k)^{[p]}=\overline{g_k^p}$$

для $g_k\in\mathit{\Gamma}^{[p]}_k(G)$, $g_\ell\in\mathit{\Gamma}^{[p]}_\ell(G)$.

5. Групповые алгебры

Пусть дано коммутативное кольцо с единицей R и группа G. *Групповой алгеброй* $R[G]$ называется ассоциативная алгебра, которая как R-модуль имеет базис $\{g\in G\}$, а умножение базисных элементов задаётся групповой операцией в G. Функтор групповой алгебры GRP $\to$ ASS является левым сопряжённым к функтору группы обратимых элементов ASS $\to$ GRP:

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{ASS}}(R[G],A)=\operatorname{Hom}_{\mathrm{GRP}}(G,A^\times),\tag{5.1}$$

где $A^\times$ обозначает группу обратимых элементов в ассоциативной алгебре A. Это определяет универсальное свойство групповой алгебры.

Предложение 5.1. *Функтор групповой алгебры* GRP $\to$ ASS *сохраняет граф произведения, то есть* $R[\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}] \cong (R[\boldsymbol{G}])^{\mathcal{K}}$.

Доказательство. Функтор групповой алгебры сохраняет произведения и, поскольку он является левым сопряжённым, сохраняет копределы. □

Предложение 5.2. *Пусть группа задана образующими и соотношениями,*

$$G = F(a_i \colon i \in I)/(r_j = 1 \text{ для } j \in J).$$

Тогда

$$R[G] \cong T(v_i, v_i^{-1} \colon i \in I)/(v_i v_i^{-1} = 1 \text{ для } i \in I,\ R_j = 1 \text{ для } j \in J),$$

где R_j *— свободный моном от* v_i *и* v_i^{-1}*, соответствующий слову* r_j*.*

Доказательство. Пусть V обозначает ассоциативную алгебру в правой части доказываемого тождества. Нам нужно проверить, что V удовлетворяет универсальному свойству, заданному соотношением (5.1). Имеем гомоморфизм $i \colon G \to V^{\times}$, заданной на образующих как $i(a_i) = v_i$. Предположим, что $f \colon G \to A^{\times}$ — гомоморфизм из G в группу обратимых элементов алгебры A. Тогда существует единственный гомоморфизм $F \colon V \to A$ такой, что $F^{\times} \circ i = f$; он определяется на образующих как $F(v_i) = f(a_i)$ и $F(v_i^{-1}) = (f(a_i))^{-1}$. □

Пример 5.3. Применяя любое из двух вышеприведённых предложений к прямоугольной группе Коксетера (2.4), получаем

$$\mathbb{Z}_2[RC_{\mathcal{K}}] \cong T_{\mathbb{Z}_2}(v_1, \ldots, v_m)/(v_i^2 = 1,\ v_i v_j v_i v_j = 1 \text{ для } \{i,j\} \in \mathcal{K}).$$

Заметим, что соотношение $v_i v_j v_i v_j = 1$ эквивалентно отношению $v_i v_j + v_j v_i = 0$.

Гомоморфизм аугментации $\varepsilon \colon R[G] \to R$ задается как $\varepsilon(\sum_i k_i g_i) = \sum_i k_i$, где $k_i \in R$ и $g_i \in G$. Пусть $\overline{R[G]} = \operatorname{Ker} \varepsilon$ — аугментационный идеал, и пусть

$$\operatorname{gr}_{\bullet}(R[G]) = \bigoplus_{n \geqslant 1} (\overline{R[G]})^n / (\overline{R[G]})^{n+1}$$

— ассоциированное градуированное кольцо для $\overline{R[G]}$-адической фильтрации.

Теорема 5.4 ([Qui68])**.** *Если* R *— поле характеристики* p*, то существует изоморфизм*

$$\mathcal{U}_p\big(\operatorname{gr}_{\bullet} \gamma^{[p]}(G)\big) \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong \operatorname{gr}_{\bullet}(R[G]),$$

градуированных R*-алгебр.*

6. Нижние p-центральные ряды граф произведений элементарных абелевых p-групп

Здесь мы рассматриваем прямоугольную группу Коксетера $RC_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2^{\mathcal{K}}$ и, в более общем случае, граф произведение групп $\mathbb{Z}_p$:

$$\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}} = \operatorname{colim}^{\text{GRP}}_{I \in \mathcal{K}} \mathbb{Z}_p^I = F(a_1, \ldots, a_m)/\big(a_i^p = 1,\ a_i a_j = a_j a_i \text{ для } \{i,j\} \in \mathcal{K}\big).$$

Наш основной результат описывает ограниченную алгебру Ли, связанную с нижним p-центральным рядом группы $\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}$.

Теорема 6.1. *Для любого симплициального комплекса* $\mathcal{K}$ *и простого числа* p *существует изоморфизм*

$$\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}\big(\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}\big) \cong FL_p(u_1,\dots,u_m)\big/\big(u_i^{[p]}=0,\ [u_i,u_j]=0 \text{ для } \{i,j\}\in\mathcal{K}\big)$$

p-алгебр Ли над $\mathbb{Z}_p$.

Обозначим через $L_{\mathcal{K}}^{[p]}$ алгебру, стоящую в правой части изоморфизма из теоремы 6.1. Пусть $\mathbb{Z}_p\langle u\rangle = FL_p(u)/(u^{[p]}=0)$ — тривиальная p-алгебра Ли с одной образующей. Тогда $L_{\mathcal{K}}^{[p]}$ является граф-произведением p-алгебр Ли $\mathbb{Z}_p\langle u\rangle$:

$$L_{\mathcal{K}}^{[p]} = FL_p(u_1,\dots,u_m)\big/\big(u_i^{[p]}=0,\ [u_i,u_j]=0 \text{ для } \{i,j\}\in\mathcal{K}\big) = \big(\mathbb{Z}_p\langle u\rangle\big)^{\mathcal{K}}.$$

В более общем случае мы можем рассматривать граф-произведения $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ элементарных абелевых p-групп $G_i=\mathbb{Z}_p^{n_i}$. Тогда $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}$ является граф-произведением $\mathbb{Z}_p^{\widetilde{\mathcal{K}}}$ для некоторого симплициального комплекса $\widetilde{\mathcal{K}}$. (А именно, $\widetilde{\mathcal{K}}$ получается заменой i-ой вершины в $\mathcal{K}$ на симплекс $\Delta_{[n_i]}$, для $i=1,\dots,m$.) Тогда $\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}})$ — граф-произведение тривиальных p-алгебр Ли $\mathbb{Z}_p\langle u_1,\dots,u_{n_i}\rangle$.

Следствие 6.2. *Функтор* $\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}\colon \mathrm{GRP}\to\mathrm{LIE}_p$ *сохраняет граф-произведения элементарных абелевых p-групп.*

Доказательство теоремы 6.1. По лемме 4.1 достаточно доказать, что

$$\mathcal{U}_p\big(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}\big(\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}\big)\big) \cong \mathcal{U}_p\big(L_{\mathcal{K}}^{[p]}\big). \tag{6.1}$$

Поскольку функтор универсальной обертывающей $\mathcal{U}_p\colon \mathrm{LIE}_p\to\mathrm{ASS}$ является левым сопряженным и сохраняет произведения, он также сохраняет граф-произведения. Поэтому,

$$\mathcal{U}_p(L_{\mathcal{K}}^{[p]}) = T_{\mathbb{Z}_p}(u_1,\dots,u_m)\big/\big(u_i^p=0,\ u_iu_j=u_ju_i \text{ для } \{i,j\}\in\mathcal{K}\big). \tag{6.2}$$

Теперь рассмотрим левую часть соотношения (6.1). По теореме 5.4, существует изоморфизм

$$\mathcal{U}_p\big(\mathrm{gr}_\bullet\,\gamma^{[p]}\big(\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}\big)\big) \cong \mathrm{gr}_\bullet\big(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}]\big).$$

Ассоциированная градуированная алгебра в правой части берется относительно фильтрации групповой алгебры $\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}]$ степенями аугментационного идеала $\overline{\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}]} = \operatorname{Ker}\varepsilon$. В силу предложения 5.1

$$\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}] \cong T_{\mathbb{Z}_p}(v_1,\dots,v_m)/(v_i^p=1,\ v_iv_j=v_jv_i \text{ для } \{i,j\}\in\mathcal{K}), \tag{6.3}$$

сравните с примером 5.3. Аугментация $\varepsilon\colon \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}]\to\mathbb{Z}_p$ задаётся как $v_i\mapsto 1$, $i=1,\dots,m$. Сравнивая (6.2) с (6.3), мы получаем изоморфизм аугментированных алгебр

$$\big(\mathcal{U}_p(L_{\mathcal{K}}^{[p]}),\varepsilon'\big) \to \big(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}],\varepsilon\big), \quad u_i\mapsto v_i-1,$$

где $\varepsilon'\colon \mathcal{U}_p(L_{\mathcal{K}}^{[p]}) \to \mathbb{Z}_p$ задаётся как $u_i \mapsto 0$. Далее, $\mathcal{U}_p(L_{\mathcal{K}}^{[p]})$ является градуированной факторалгеброй свободной ассоциативной алгебры (6.2) с градуировкой $\deg u_i = 1$. Фильтрация алгебры $\mathcal{U}_p(L_{\mathcal{K}}^{[p]})$ степенями аугментационного идеала $\operatorname{Ker}\varepsilon'$ совпадает с фильтрацией, задаваемой градуировкой. Для этой фильтрации ассоциированная градуированная алгебра $\operatorname{gr}_\bullet\bigl(\mathcal{U}_p(L_{\mathcal{K}}^{[p]})\bigr)$ есть просто $\mathcal{U}_p(L_{\mathcal{K}}^{[p]})$. Таким образом,

$$\mathcal{U}_p(L_{\mathcal{K}}^{[p]}) \cong \operatorname{gr}_\bullet\bigl(\mathcal{U}_p(L_{\mathcal{K}}^{[p]}),\varepsilon'\bigr) \cong \operatorname{gr}_\bullet\bigl(\mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}],\varepsilon\bigr) \cong \mathcal{U}_p\bigl(\operatorname{gr}_\bullet\gamma^{[p]}\bigl(\mathbb{Z}_p^{\mathcal{K}}\bigr)\bigr),$$

что доказывает изоморфизм (6.1) и теорему. □

В случае прямоугольных групп Коксетера получаем

Теорема 6.3. *Для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ существует изоморфизм*

$$\operatorname{gr}_\bullet\gamma^{[2]}(RC_{\mathcal{K}}) \cong FL_2(u_1,\ldots,u_m)/\bigl(u_i^{[2]}=0,\ [u_i,u_j]=0 \text{ для } \{i,j\}\in\mathcal{K}\bigr)$$

2-алгебр Ли над $\mathbb{Z}_2$.

Мы также получаем аналог предложения 3.2 для прямоугольных групп Коксетера.

Предложение 6.4. *Для флагового комплекса $\mathcal{K}$ существует изоморфизм*

$$\mathcal{U}_2\bigl(\operatorname{gr}_\bullet\gamma^{[2]}(RC_{\mathcal{K}})\bigr) \cong H_*\bigl(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbb{Z}_2\bigr)$$

ассоциативных $\mathbb{Z}_2$-алгебр.

Чтобы изоморфизм из предложения 6.4 был согласован с градуировкой в алгебре $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}});\mathbb{Z}_2)$, необходимо положить $\deg u_i = 1$.

Список литературы

[BBC20] Anthony Bahri, Martin Bendersky и Frederick Cohen. «Polyhedral products and features of their homotopy theory». В: *Handbook of Homotopy Theory*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2020, с. 103—144.

[BG11] Peter Bubenik и Leah Gold. «Graph products of spheres, associative graded algebras and Hilbert series». В: *Mathematische Zeitschrift* 268.3–4 (2011), с. 821—836.

[BP15] Victor Buchstaber и Taras Panov. *Toric Topology*. Т. 204. Math. Surveys Monogr. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[DK92a] Gérard Duchamp и Daniel Krob. «The free partially commutative Lie algebra: bases and ranks». В: *Advances in Mathematics* 95.1 (1992), с. 92—126.

[DK92b] Gérard Duchamp и Daniel Krob. «The lower central series of the free partially commutative group». В: *Semigroup Forum*. Т. 45. 1. Springer. 1992, с. 385—394.

[Dob09] Natalia Dobrinskaya. *Loops on polyhedral products and diagonal arrangements*. arXiv:0901.2871. 2009.

[Grb+15] Jelena Grbić, Taras Panov, Stephen Theriault и Jie Wu. «The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes». В: *Transactions of the American Mathematical Society* 368.9 (нояб. 2015), с. 6663—6682. ISSN: 1088-6850. URL: http://dx.doi.org/10.1090/TRAN/6578.

[Hal34] Philip Hall. «A contribution to the theory of groups of prime-power order». В: *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1934), с. 29—95.

[Hal50] Marshall Hall. «A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups». В: *Proceedings of the American Mathematical Society* 1.5 (1950), с. 575—581.

[Hal59] Marshall Hall. *The theory of groups*. Macmillan, 1959.

[Jac41] Nathan Jacobson. «Restricted Lie algebras of characteristic p». В: *Transactions of the American Mathematical Society* 50.1 (1941), с. 15—25.

[Jac79] Nathan Jacobson. *Lie Algebras*. [Русский перевод: Джекобсон Н., *Алгебры Ли*, «Мир», Москва, 1964.] New York: Dover Publications, Inc., 1979.

[KR80] Ki Hang Kim и Fred Roush. «Homology of certain algebras defined by graphs». В: *Journal of Pure and Applied Algebra* 17.2 (1980), с. 179—186.

[Laz54] Michel Lazard. «Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie». В: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Т. 71. 2. 1954, с. 101—190.

[MM65] John Milnor и John Moore. «On the structure of Hopf algebras». В: *Annals of Mathematics* 81.2 (1965), с. 211—264.

[PR08] Taras Panov и Nigel Ray. «Categorical aspects of toric topology». В: Contemporary Mathematics 460 (2008). Под ред. Megumi Harada и др., с. 293—322.

[PR24] Taras Panov и Temurbek A. Rahmatullaev. «Polyhedral products, graph products and p-central series». В: *Труды МИАН*. Топология, геометрия, комбинаторика и математическая физика, Сборник статей. К 80-летию члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера 326 (2024).

[Pre69] Robert Prener. «The lower central series of special groups generated by elements of order two». Дис. … док. Polytechnic Institute of Brooklyn, 1969.

[Qui68] Daniel G Quillen. «On the associated graded ring of a group ring». В: *Journal of Algebra* 10.4 (1968), с. 411—418.

[Ser06] Jean-Pierre Serre. *Lie Algebras and Lie Groups*. Т. 1500. Lecture Notes in Mathematics. [Русский перевод: Серр Ж.-П., *Алгебры Ли и группы Ли*, «Мир», Москва, 1969.] Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[Ver22] Yakov Veryovkin. *Graded components of the Lie algebra associated with the lower central series of a right-angled Coxeter group*. 2022. DOI: `10.48550/ARXIV.2208.07674`. URL: `https://arxiv.org/abs/2208.07674`.

[VR24] Ya A. Veryovkin и Temurbek A. Rahmatullaev. «О последовательных факторах нижнего центрального ряда прямоугольных групп Кокстера». В: *Математические заметки, Том 116* (2024).

[Wad16] Richard D Wade. «The lower central series of a right-angled Artin group». В: *L'Enseignement Mathématique* 61.3 (2016), с. 343—371.

[Wal70] Hermann V Waldinger. «The lower central series of groups of a special class». В: *Journal of Algebra* 14.2 (1970), с. 229—244.

[Бах85] Ю.А. Бахтурин. *Тождества в алгебрах Ли*. "Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1985. URL: `https://books.google.ru/books?id=iCk%5C_zgEACAAJ`.

[Бур72] Николас Бурбаки. *Группы и алгебры Ли*. Мир, 1972.

[Вер19] Яков Александрович Верёвкин. «Присоединенная алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера». В: *Труды Математического института имени ВА Стеклова* 305.0 (2019), с. 61—70.

[МКС74] Вильгельм Магнус, Авраам Каррас и Дональд Солитэр. *Комбинаторная теория групп: Представление групп в терминах образующих и соотношений*. Наука, 1974.

[ПВ16] Тарас Евгеньевич Панов и Яков Александрович Верёвкин. «Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера». В: *Математический сборник* 207.11 (2016), с. 105—126.

Email address: raxtemur@gmail.com