Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

механико-математический факультет
кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Вычисления некоторых момент-угол комплексов и их колец когомологий

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

Выполнил:
Овчинников Руслан Артурович

1 Введение

В торической топологии вычисление момент-угол комплексов даже для довольно простых симплициальных комплексов часто оказывается трудной задачей, но некоторые виды поддаются анализу, данная работа посвящена рассмотрению нескольких примеров, а также вычислению когомологий.

Выражаю огромную благодарность своему научному руководителю, Тарасу Евгеньевичу Панову, за уделенное время, обсуждение работы и интересные задачи.

2 Основные определения, утверждения и простейшие примеры

Определение 1. *Абстрактный симплициальный комплекс на множестве* $[m]$ *— это набор* K *подмножеств* $I \subset [m]$*, таких, что если* $I \in K$*, то и любое подмножество* $J \subset I$ *также принадлежит* K*.*

Пусть $J \subset [m]$ — некоторое подмножество. *Полный подкомплекс* на J определяется как:

$$K_J = \{L \in K \mid L \subset J\}.$$

Определение 2 (Полиэдральное произведение)**.** *Пусть* $\mathcal{K}$ *– симплициальный комплекс на* $[m]$ *и пусть* $A \subset X$*.*

Для любого подмножества $I \subset [m]$ *положим*

$$(X, A)^I = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{j=1}^{m} X : x_j \in A \quad \text{для } j \notin I \right\}$$

и определим полиэдральное произведение $(X, A)^{\mathcal{K}}$*, соответствующее* $\mathcal{K}$*, как*

$$(X, A)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (X, A)^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X \times \prod_{i \notin I} A \right).$$

Если взять

$$(X, A) = (D^2, S^1),$$

то получим определение момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$*, а если*

$$(X, A) = (D^1, S^0),$$

то будет определение вещественного момент-угол комплекса $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$

Заметим, что в определении полиэдрального произведения достаточно брать только максимальные симплексы

Пример 1. *Пусть* $K = \Delta^{m-1}$ $(m-1)$*-мерный симплекс, тогда*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2)^m,$$

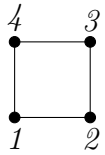
$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = I^m$$

Пример 2. *Пусть* $K = \partial\Delta^{m-1}$ *граница* $(m-1)$*-мерного симплекса.*

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} &= \bigcup_{i=1}^{m} \left(D^2 \times \cdots \times \underbrace{S^1}_{i\text{-th position}} \times \cdots \times D^2 \right) \\ &= \partial\left((D^2)^m\right) \cong S^{2m-1}\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = S^{m-1}$$

Пример 3.



Пусть $\mathcal{K} = \partial P_4$ *граница квадрата. Тогда есть 4 максимальных симплекса:*

$$\{1,3\}, \quad \{2,3\}, \quad \{1,4\}, \quad \{2,4\}$$

и момент-угол комплекс можно описать алгебраически

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} &= (D^2 \times S^1 \times D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2 \times D^2 \times S^1) \\ &\quad \cup (D^2 \times S^1 \times S^1 \times D^2) \cup (S^1 \times D^2 \times S^1 \times D^2) \\ &= \big((D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)\big) \times D^2 \times S^1 \\ &\quad \cup \big((D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)\big) \times S^1 \times D^2 \\ &= \big((D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)\big) \times \big((D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2)\big) \\ &\cong S^3 \times S^3\end{aligned}$$

В случае с $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ *получим* $S^1 \times S^1$

Введем несколько алгебраических определений

Определение 3. *Кольцом Стэнли–Райзнера симплициального комплекса K на m вершинах называется факторкольцо*

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/I_K,$$

где $I_K = \{v_I \mid I \notin K\}$ – идеал Стэнли–Райзнера. Алгеброй Кошуля называется

$$\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]$$

Наконец, $R^*(\mathcal{K})$ обозначается алгебра Кошуля, факторизованная по соотношениям

$$(u_i v_i, v_i^2 | i = 1, ..., m)$$

Теорема 1. *См.[1] Есть изоморфизм*

$$H^*(Z_\mathcal{K}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z})$$
$$\cong H(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d) \cong H(R^*(\mathcal{K}), d),$$

Теорема 2. *См.[1] Также имеют место изоморфизмы групп*

$$H^k(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J \subseteq [m]} \widetilde{H}^{k-|J|-1}(K_J).$$

$$H^k(\mathcal{R}_K) \cong \bigoplus_{J \subseteq [m]} \widetilde{H}^{k-1}(K_J).$$

Теперь напомним некоторые утверждения про операции над топологическими пространствами

$$X \ltimes Y \simeq X \times Y/(X \times pt)$$

$$X \rtimes Y \simeq X \times Y/(pt \times Y)$$

$$\Sigma(A \times B) \cong \Sigma A \vee \Sigma B \vee (\Sigma A \wedge B)$$

$$\Sigma X \wedge Y \simeq \Sigma(X \wedge Y) \simeq X * Y, \quad \Sigma X \simeq X \wedge S^1$$

$$\Sigma S^n \simeq S^{n+1}, \quad S^k * S^l \simeq S^{k+l+1}, \quad S^k \wedge S^l \simeq S^{k+l}$$

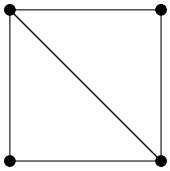
$$\Sigma X \ltimes Y \simeq \Sigma X \vee (\Sigma Y \wedge X)$$

3 Склейка симплициальных комплексов

Теорема 3. *См.[1] Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_1$ симплициальные комплексы и $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup_I \mathcal{K}_2$ получается склейкой $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ по грани I, тогда если $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}$ гомотопически эквивалентны букетам сфер, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентен*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq \left(T^{m-m_2} * T^{m-m_1}\right) \vee \left(Z_{K_1} \rtimes T^{m-m_1}\right) \vee \left(T^{m-m_2} \ltimes Z_{K_2}\right)$$

Рассмотрим несколько примеров, в которых эта теорема оказывается полезна

Пример 4. 

$\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ представляют из себя границы верхнего и нижнего треугольников соответственно. $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2} \simeq S^5$. $m = 4, m_1 = m_2 = 3$. Тогда первое слагаемое это S^3. Второе и третье слагаемое одинаковы.

$$\begin{aligned} S^5 \rtimes T^1 = \Sigma S^4 \rtimes T^1 \simeq \Sigma S^4 \vee \left(\Sigma T^1 \wedge S^4\right) \simeq S^5 \vee \left(\Sigma T^1 \wedge S^4\right) \\ \simeq S^5 \vee \left(S^2 \wedge S^4\right) \simeq S^5 \vee S^6 \end{aligned}$$

Складываем все вместе и получаем:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq S^3 \vee (S^5 \vee S^6) \vee (S^5 \vee S^6)$$

Теперь немного обобщим последний пример, но прежде докажем полезное утверждение

Теорема 4.

$$\Sigma T^n \simeq \bigvee_{k=2}^{n+1} (S^k)^{\vee C_n^{k-1}}.$$

Доказательство.

$$\Sigma T^1 = \Sigma S^1 = S^2$$

$$\Sigma T^2 = \Sigma(S^1 \times S^1) = \Sigma S^1 \vee \Sigma S^1 \vee \Sigma(S^1 \wedge S^1) = S^2 \vee S^2 \vee S^3$$

$$\Sigma T^n = \Sigma(T^{n-1} \times S^1) = \Sigma T^{n-1} \vee \Sigma S^1 \vee \Sigma(T^{n-1} \wedge S^1) = \Sigma T^{n-1} \vee S^2 \vee \Sigma\Sigma T^{n-1}$$

Во-первых из формулы выше видим, что всегда будем получать букеты сфер. Введем функцию $F(n,i)$ равную количеству i-мерных сфер, входящих в букет ΣT^n, эта функция удовлетворяет следующим реккурентным соотношениям

$$F(n,i) = F(n-1,i) + F(n-1,i-1), i \neq 2$$

$$F(n,2) = F(n-1,2) + 1 + F(n-1,1)$$

Первая формула является реккурентным соотношением для чисел сочетаний. Также верны следующие начальные условия, задающие эту функцию

$$F(1,k) = 0, k > 2,$$

$$F(n,0) = F(1,0) = 0,$$

$$F(n,1) = F(1,1) = 0,$$

$$F(n,2) = F(n-1,2) + 1 = n = C_n^1$$

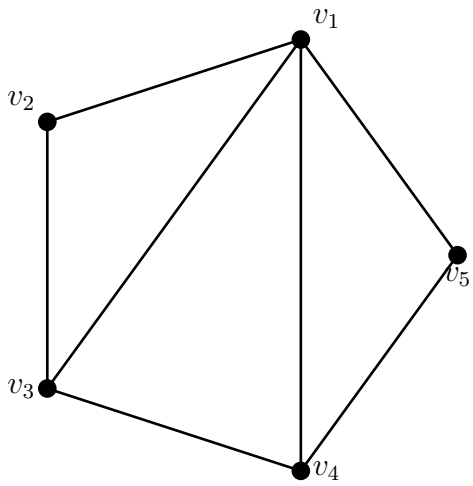
Таким образом, наша функция представляет из себя сдвинутые числа сочетаний $F(n,k) = C_n^{k-1}$, для удобства выпишем последовательность количества сфер, начиная с размерности 0

$$0, 0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n, 0, 0, ...$$

□

Следствие 1.

$$\Sigma^m T^n \simeq \Sigma^{m-1}(\Sigma T^n) \simeq \Sigma^{m-1}\left(\bigvee_{k=2}^{n+1}(S^k)^{\vee C_n^{k-1}}\right) = \bigvee_{k=2}^{n+1}(S^{k+m-1})^{\vee C_n^{k-1}}$$



Пример 5.

В качестве $\mathcal{K}_1$ возьмем полный подкомплекс на первых 4 вершинах, тогда он представляет из себя симплициальный комплекс из предыдущего примера, а $\mathcal{K}_2$ граница треугольника на вершинах $v1, v4, v5$. $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \simeq S^3 \vee (S^5 \vee S^6) \vee (S^5 \vee S^6), \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2} \simeq S^5$. $m = 5, m_1 = 4, m_2 = 3$.

$$T^1 * T^2 \simeq (S^0 * S^0) * T^2 \simeq S^0 * \Sigma T^2 \simeq \Sigma\Sigma T^2 \simeq S^3 \vee S^3 \vee S^4$$

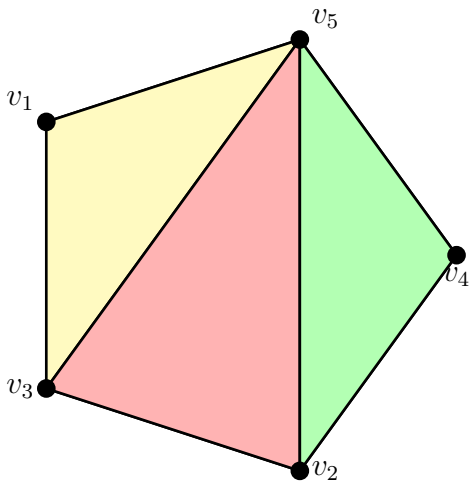
$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \rtimes T^1 &\simeq \Sigma X \vee (\Sigma T^1 \wedge X) \\ &\simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \vee (S^2 \wedge X) \\ &\simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \vee \Sigma \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \\ &\simeq S^3 \vee S^4 \vee (S^5)^{\vee 2} \vee (S^6)^{\vee 4} \vee (S^7)^{\vee 2} \end{aligned}$$

$$T^2 \ltimes S^5 \simeq \Sigma S^4 \rtimes T^2 \simeq \Sigma S^4 \vee (\Sigma T^2 \wedge S^4) \simeq S^5 \vee \Sigma^5 T^2 \simeq (S^5)^{\vee 2} \vee (S^6)^{\vee 2} \vee S^7$$

Собираем все вместе

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq (S^3)^{\vee 3} \vee (S^4)^{\vee 2} \vee (S^5)^{\vee 4} \vee (S^6)^{\vee 6} \vee (S^7)^{\vee 3}$$

Теперь рассмотрим немного другую версию последнего примера



Пример 6.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq & D^2 \times S^1 \times D^2 \times S^1 \times D^2 \\
& \cup S^1 \times D^2 \times D^2 \times S^1 \times D^2 \\
& \cup S^1 \times D^2 \times S^1 \times D^2 \times D^2 \\
\simeq & \big(D^2 \times S^1 \times D^2 \times S^1 \\
& \cup S^1 \times D^2 \times D^2 \times S^1 \\
& \cup S^1 \times D^2 \times S^1 \times D^2\big) \times D^2 \\
\simeq & D^2 \times S^1 \times D^2 \times S^1 \\
& \cup S^1 \times D^2 \times D^2 \times S^1 \\
& \cup S^1 \times D^2 \times S^1 \times D^2
\end{aligned}$$

Последнее выражение отвечает момент-угол комплексу графа пути



Этот граф можно представить в виде склейки по ребру $(3, 2)$ двух меньших графов, K_1 и K_2 соответственно:





$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i} \simeq D^2 \times S^1 \times D^2 \cup S^1 \times D^2 \times D^2 \simeq (D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2) \times D^2 \simeq S^3 \times D^2 \simeq S^3$

Значит применима теорема, $m = 4, m_i = 3$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} &\simeq (T^1 * T^1) \vee (S^3 \rtimes T^1) \vee (T^1 \ltimes S^3) \\ &\simeq S^3 \vee \left(\Sigma S^2 \vee (\Sigma T^1 \wedge S^2)\right)^{\vee 2} \\ &\simeq S^3 \vee \left(S^3 \vee (S^2 \wedge S^2)\right)^{\vee 2} \\ &\simeq S^3 \vee \left(S^3 \vee S^4\right)^{\vee 2} \\ &\simeq (S^3)^{\vee 3} \vee (S^4)^{\vee 2}\end{aligned}$$

Эти примеры имеют далеко идущие обобщения

Теорема 5. *Пусть K_n симплициальный комплекс, получаемый приклеиванием n раз границы k-мерного симплекса вдоль любых $(k-1)$-мерных граней, начиная с границы k-мерного симплекса, тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n}$ гомотопически эквивалентен следующему букету:*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \simeq \bigvee_{i=1}^{n-1} \left(S^{i+1}\right)^{\vee\left(nC_n^{i-1} - C_n^i\right)} \vee \left(S^{n+2}\right)^{\vee n} \vee \bigvee_{i=1}^{n+1} \left(S^{i+2k}\right)^{\vee\left((n+1)C_n^{i-1}\right)}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{n+1}}$ получается из $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n}$ приклеиванием приклеиванием 1 раз границы k-мерного симплекса к $(k-1)$-мерной грани. Снова нужно использовать формулу из теоремы 3

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq \left(T^{m-m_2} * T^{m-m_1}\right) \vee \left(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \rtimes T^{m-m_1}\right) \vee \left(T^{m-m_2} \ltimes \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}\right)$$

Теперь $m = k+n+2, m_1 = k+n+1, m_2 = k+1$, подставим в формулу:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{n+1}} \simeq \left(T^{n+1} * T^1\right) \vee \left(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \rtimes T^1\right) \vee \left(T^{n+1} \ltimes S^{2k+1}\right)$$

Отдельно посчитаем каждое слагаемое

$$T^{n+1} * T^1 \simeq T^{n+1} * (S^0 * S^0) \simeq \Sigma\Sigma T^{n+1} \simeq \bigvee_{i=2}^{n+2} (S^{i+1})^{\vee C_{n+1}^{i-1}}$$

$$\begin{aligned}T^{n+1} \ltimes S^{2k+1} &\simeq \Sigma S^{2k} \rtimes T^{n+1} \\ &\simeq S^{2k+1} \vee \left(\Sigma T^{n+1} \wedge S^{2k}\right) \\ &\simeq S^{2k+1} \vee \Sigma^{2k} T^{n+1} \\ &\simeq S^{2k+1} \vee \bigvee_{i=2}^{n+2} \left(S^{i+2k}\right)^{\vee C_{n+1}^{i-1}}\end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \rtimes T^1 \simeq \Sigma X \rtimes T^1 \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \vee (\Sigma T^1 \wedge X) \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \vee \Sigma \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n}$$

Итого:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{n+1}} \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \vee \Sigma \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \vee S^{2k+1} \vee \bigvee_{i=2}^{n+2} (S^{i+1})^{\vee C_{n+1}^{i-1}} \vee \bigvee_{i=2}^{n+2} (S^{i+2k})^{\vee C_{n+1}^{i-1}}$$

Последовательность размерностей сфер проще представлять в виде полиномоа f_n (производящих функций последовательностей), для них можно записать реккурентное соотношение с начальными условиями(Надстройка заменяется на умножение на x, а букет заменяется на сумму, которая свернется по биному), которое после упрощений выглядит так:

$$f_0 = x^{2k+1}$$

$$f_n = (x+1)f_{n-1} + (x^2 + x^{2k+1})(1+x)^n - x^2$$

Для решения реккуренты делаем замену:

$$f_n = (1+x)^n g_n$$

Получаем:

$$g_n - g_{n-1} = (x^2 + x^{2k+1}) - \frac{x^2}{(1+x)^n}$$

Слева имеем телескопическую сумму, а справа сумму постоянных слагаемых и геометрической прогрессии

Искомая функция после упрощений принимает такой вид:

$$f_n = (1+x)^n(nx^2 - x) + x + (n+1)x^{2k+1}(1+x)^n$$

Далее осталось разложить $(1+x)^n$ в сумму, немного преобразовать и получаем нужную формулу □

Следующая теорема отличается от предыдущей лишь тем, что прежде мы приклеивали границу симплекса, а теперь будем приклеивать целый симплекс

Теорема 6. *Пусть K_n симплициальный комплекс, получаемый приклеиванием n раз k-мерного симплекса вдоль любых $(k-1)$-мерных граней, начиная с k-мерного симплекса, тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n}$ гомотопически эквивалентен следующему букету:*

Доказательство. Для начала попробуем склеить два симплекса по общей гиперграни, без ограничения общности можно считать, что общими будут первые k вершин, распишем, как выглядит $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1}$:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \simeq (D^2 \times D^2 \times \cdots \times D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2 \times D^2 \times \cdots \times D^2) \simeq S^1 \times D^2 \cup D^2 \times S^1 \simeq S^3$$

Теперь рассмотрим дерево T_n, приклеим к нему ребро E по вершине v, получив T_{n+1}, и возьмем произвольное ребро E' из T_n, инцидентное вершине v, тогда заметим, что

$$T_{n+1} \simeq T_n \cup_{E'} (E' \cup_v E)$$

Наконец, рассмотрим произвольный $\mathcal{K}_n$. Рассуждая аналогично, приклеим к нему симплекс Δ^k по грани $\Gamma^{k=1}$ и получим $\mathcal{K}_{n+1}$, возьмем в $\mathcal{K}_n$ произвольный симплекс Δ^k_1, содержащий Γ, тогда

$$\mathcal{K}_{n+1} \simeq \mathcal{K}_n \cup_{\Delta^k_1} (\Delta^k_1 \cup_\Gamma \Delta^k)$$

Исходя из вычисленного вначале, по индукции получаем, что для любого n и k применима Теорема 3 и так как момент-угол комплекс второго слагаемого всегда гомотопически эквивалентен S^3, а также $m = n+k+2, m_1 = n+k+1, m_2 = k+2$, то есть $m - m_1 = 1, m - m_2 = n$, то нет зависимости от k, таким образом

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \simeq \mathcal{Z}_{T_n}$$

Про деревья известно следующее предложение, которое доказывается уже известными нам методами

Предложение 1. *См.[1] Пусть $n \geq 2$. Тогда момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{T_n}$ имеет следующий гомотопический тип:*

$$\mathcal{Z}_{T_n} \simeq \bigvee_{k=2}^{n+1} \left(S^{k+1}\right)^{\vee (k-1)C^k_{n+1}}$$

□

4 Вещественный момент-угол комплекс

Теорема 7. *См.[1] Если $\mathcal{K}$-триангуляция S^{n-1}, то $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ замкнутое гладкое ориентируемое многообразие* $\dim \mathcal{R}_\mathcal{K} = n$

Теорема 8. *Пусть K — граница n-угольника. Тогда R_K — 2-мерная замкнутая ориентируемая поверхность рода*

$$g = 1 + (n-4)2^{n-3}$$

Доказательство. $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ является подкомплексом I^n. $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ можно представить в виде объединения двумерных граней куба следующего вида:

$$\{(\pm 1, \dots, \pm 1, x_i, x_{i+1}, \pm 1, \dots, \pm 1) : x_i, x_{i+1} \in [-1, 1]\},$$

То есть, $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ есть объединение двумерных граней куба, в которых изменяется только пара соседних координат. В каждой одномерной грани

$$\{(\pm 1, \dots, \pm 1, x_i, \pm 1, \dots, \pm 1) : x_i \in [-1, 1]\}$$

сходятся две двумерные грани:

$$\{(\pm 1, \dots, \pm 1, x_{i-1}, x_i, \pm 1, \dots, \pm 1) : x_i, x_{i+1} \in [-1, 1]\},$$

$$\{(\pm 1, \dots, \pm 1, x_i, x_{i+1}, \pm 1, \dots, \pm 1) : x_i, x_{i+1} \in [-1, 1]\},$$

Любые две двумерные грани либо не пересекаются, либо пересекаются по вершине, либо пересекаются по одномерной грани. В каждой вершине сходится ровно m квадратов, образуя m-гранный угол. Отсюда и из теоремы выше получаем, что $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ является замкнутым двумерным многообразием. Такие поверхности определяются эйлеровой характеристикой.

Найдем число вершин B, ребер P и граней Γ. Каждая вершина I^n является вершиной $\mathcal{R}_\mathcal{K}$, значит $= 2^n$. Γ равно числу 2-мерных граней. Чтобы посчитать их число, нужно сначала выбрать i (n способов), а затем расставить $+1$ и -1 (2^{n-2} способа), то есть $\Gamma = n2^{n-2}$. P равно числу 1-мерных граней. Каждая 2-мерная грань имеет 4 1-мерные грани, а в каждой 1-мерной грани сходится 2 2-мерные. А значит число ребер равно $P = 4\Gamma/2 = 2\Gamma = n2^{n-1}$. Эйлерова характеристика равна

$$\chi(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = B - P + \Gamma = 2^{m-2}(4-m) = 2 - 2g$$

□

Теперь возникает желание изучить $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для того же симплициального комплекса

5 Когомологии

$$H^0(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \widetilde{H}^{-1}(\emptyset) \cong \mathbb{Z}$$
$$H^1(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{J\subseteq[m]} \widetilde{H}^{-|J|}(\mathcal{K}_J) \cong 0$$
$$H^2(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{J\subseteq[m]} \widetilde{H}^{1-|J|}(\mathcal{K}_J) \cong 0$$

Посчитаем i-ые когомологии $\mathcal{Z}_K$:

$$H^i(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subseteq[m]} \widetilde{H}^{i-|J|-1}(\mathcal{K}_J).$$

Так как $\mathcal{K}_J$ гомотопически эквивалентен либо набору точек, либо окружности. В случае точек ненулевыми могут быть только $\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_J)$, их геометрический смысл таков, они равны $\mathbb{Z}$, возведенной в степень, равную количеству (компонент связности $\mathcal{K}_J$) -1. Тогда нам подходят только те J, у которых $|J| = i-1$. В дальнейшем количество компонент связности будем называть "cc"

$$\bigoplus_{J\subseteq[m]} \widetilde{H}^{i-|J|-1}(\mathcal{K}_J) \cong \bigoplus_{|J|=i-1} \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_J) \cong \bigoplus_{|J|=i-1} \bigoplus_{cc=k} \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_J) \cong \bigoplus_{cc=k} \bigoplus_{|J|=i-1} \mathbb{Z}^{k-1}$$

Теперь найдем количество J таких, что $|J| = i-1$ и $cc = k$ Зафиксируем одну аершину, есть 2 варианта, либо мы ее берем, либо не берем. Рассмотрим первый случай, тогда после нее будет взято еще несколько вершин их количество вместе с фиксированной обозначим за a_1, далее часть вершин будет пропущена, это количество обозначим за b_1, затем снова несколько вершин будет взято a_2, а затем пропущено b_2 и так далее. Всего компонент k штук, значит будет вплоть до a_k и b_k, наконец остается часть вершин до фиксированной, их количество обозначим за a_{k+1}. $a_i, b_i \geq 1, i = 1, \ldots, k$. Остается еще часть вершин $|J| - k$, которые расставить на a_i. Аналогично остается еще часть вершин $n - |J| - k$, которые расставить на b_i. Иными словами нам нужно разбить $|J| - k$ на $k+1$ неотрицательное слагаемое. Это известная задача о шарах и перегородках. Пусть нас надо разбить b на a неотрицательных слагаемых, тогда количество способов это сделать считается следующей функцией:

$$F(a, b) = C^{a-1}_{a+b-1}$$

Применяя эту функцию к нашей задаче, получаем:

$$F(k+1, |J| - l)F(k, n - |J| - k)$$

Аналогично можно рассмотреть случай, когда фиксированная вершина не берется:

$$F(k, |J| - k)F(k + 1, n - |J| - k)$$

Суммарно получаем:

$$G(n, k, |J|) := F(k + 1, |J| - l)F(k, n - |J| - k) + F(k, |J| - k)F(k + 1, n - |J| - k)$$

Теперь можно избавиться от одной прямой суммы:

$$\bigoplus_{cc=k} \bigoplus_{|J|=i-1} \mathbb{Z}^{k-1} \cong \bigoplus_{cc=k} \mathbb{Z}^{G(n,k,i-1)(k-1)}$$

Осталось просуммировать всем cc, суммировать надо от $k = 2$ до $min(|J|, n-|J|)$

$$\bigoplus_{cc=k} \mathbb{Z}^{G(n,k,i-1)(k-1)} \cong \mathbb{Z}^{\Sigma_{k=2}^{min(|J|,n-|J|)} G(n,k,i-1)(k-1)}$$

Остались последние когомологии

$$H^n(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = 0$$

$$H^{n+1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = 0$$

$$H^{n+2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$$

Список литературы

[1] V.M. Buchstaber и T.E.Panov. “Toric Topology”. В: Math.Surv. and Monogr. 204 (2015).

[2] Hatcher A. Algebraic topology. Cambridge Univ. Press, 2002.

[3] Я.А.Верёвкин. “Алгебры Понтрягина некоторых момент-угол комплексов”. В: Дальневост. матем. журн. (2016).

[4] D.McGavran. “Adjancent connected sums and torus action”. В: Trans Amer.Math.Soc 251 (1979), с. 235—254.