Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа
студентки 503 группы
Оганисян Виктории Алексеевны

Момент-угол-комплексы и кольца когомологий специального вида

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, апрель 2023

Введение

Момент-угол-комплексы — интересный и важный класс пространств, отдельный интерес среди которых представляют те, которые соответствуют простым многогранникам P. Такие момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_P$ являются гладкими многообразиями с комплексной структурой; более того, они могут быть заданы как пересечение эрмитовых квадрик. Имеется известный результат, связывающий структуру кольца когомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и комбинаторику симплициального комплекса $\mathcal{K}$ (см. теорему 2.5).

В связи с этим есть много вопросов о том, какие ограничения накладывает кольцо $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ на комбинаторику $\mathcal{K}$, а также на топологию и геометрию самого $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

В своей курсовой работе я сосредоточу внимание на двух результатах:

1. Если P — простой четырехмерный многогранник и $\mathcal{K}_P$ имеет хордовый 1-остров, обязательно ли $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений пар сфер? Оказывается, да (см. теорему 3.4).

2. Если $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ изоморфно кольцу когомологий произведения сфер, то каким может быть $\mathcal{K}$? Оказывается, в этом случае $\mathcal{K} = \partial\Delta^{q_1} * \ldots * \partial\Delta^{q_r} * \Delta^a$, то есть это джойн границ симплексов и быть может еще одного симплекса (см. теорему 4.1).

В этом направлении остаётся ещё много интересных вопросов.

1 Предварительные сведения и обозначения

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, мы по умолчанию полагаем, что пустое множество $\varnothing$ и все одноэлементные подмножества $\{i\} \subset [m]$ содержатся в $\mathcal{K}$.

Для $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ будем обозначать $\mathcal{K}_I$ (или же $\mathcal{K}_{\{i_1,\ldots,i_k\}}$) полный подкомплекс в $\mathcal{K}$ на вершинах $i_1, \ldots, i_k$.

$\mathcal{K}^i$ будем обозначать i-й остов симплициального комплекса $\mathcal{K}$.

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, соответствующий $\mathcal{K}$, можно определить следующим образом (см. параграф 4.1 [1]):

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{I \subset \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1 \right).$$

Графом мы называем симплициальный комплекс, не содержащий симплексов размерности ≥ 2.

Определение 1.1. *Граф* Γ *называется* <u>*хордовым*</u>, *если каждый его цикл с четырьмя и более вершинами содержит хорду (ребро, соединяющее две вершины, которые не являются соседними в цикле).*

Нам будет удобнее ещё одно описание хордовых графов:

Теорема 1.2 (см. [2]). *Граф является хордовым тогда и только тогда, когда его вершины можно упорядочить таким образом, что для каждой вершины* $\{i\}$ *множество всех ее соседей, которые меньше ее, образует клику.*

Порядок вершин, описываемый в данной теореме, называется <u>совершенным порядком исключения</u>.

Многогранник P размерности n называется <u>простым</u>, если каждая его вершина принадлежит ровно n его гиперграням. Соответственно, если P простой, то двойственный к нему многогранник P^* будет симплициальным; его границу ∂P^* можно рассматривать как симплициальный комплекс, который мы будем обозначать $\mathcal{K}_P$ (нерв-комплекс простого многогранника P). Соответствующий $\mathcal{K}_P$ момент-угол-комплекс обозначается $\mathcal{Z}_P$.

Простой многогранник Q является <u>стековым</u>, если он получается из симплекса цепочкой последовательных звёзных подразбиений гиперграней. Соотвественно, двойственный к стековому многогранник P получается из симплекса цепочкой последовательных срезок вершин.

Далее, если не оговорено противное, m будет обозначать количество гиперграней многогранника, а n — его размерность.

Теорема 1.3 ([1, теорема 4.1.4, следствие 6.2.5]). *Пусть* $\mathcal{K}$ *— триангуляция сферы размерности* $(n-1)$ *с* m *вершинами. Тогда* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ *— замкнутое топологическое многообразие размерности* $m+n$.

Пусть P *— простой* n*-мерный многогранник с* m *гипергранями, тогда* $\mathcal{Z}_P$ *— гладкое многообразие размерности* $m+n$.

2 Несколько вспомогательных утверждений

Следующая несложная лемма сыграет существенную роль в дальнейших доказательствах:

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, а $\mathcal{K}_J$ — полный подкомплекс, соответствующий $J \subset [m]$. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$ — ретракт $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, а $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J})$ — подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.*

Доказательство. Если профакторизовать $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ по всем координатам из множества $[m] \setminus J$, мы получим в точности $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$. Действительно, пусть $i : \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \hookrightarrow (D^2)^m$ — каноническое вложение, а $q : (D^2)^m \to (D^2)^{|J|}$ — отображение факторизации слагаемых с номерами из множества $[m] \setminus J$, тогда $r = q \circ i : \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$ и есть нужная ретракция. □

Определение 2.2. *Градуированная коммутативная связная* **k***-алгебра A называется* <u>*алгеброй Пуанкаре*</u>*, если ее размерность над* **k** *конечна (т.е. $A = \bigoplus_{i=0}^{d} A^i$), и* **k***-линейные отображения*

$$A^i \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(A^{d-i}, A^d), \qquad a \mapsto \varphi_a, \ \textit{where} \ \varphi_a(b) = ab$$

являются изоморфизмами для всех $0 < i < d$.

Алгебра когомологий многообразия в частности является алгеброй Пуанкаре.

Определение 2.3. *Пространство X называется пространством с двойственностью Пуанкаре (над* **k***), если $H^*(X; \mathbf{k})$ — алгебра Пуанкаре.*

Теорема 2.4 (Теорема 4.6.8 из [1]). *$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — простанство с двойственностью Пуанкаре над полем* **k** *тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ — Горенштейнов комплекс над* **k***.*

В частности, если P — простой многогранник, тогда $\mathcal{Z}_P$ — пространство с двойственностью Пуанкаре.

Теорема 2.5 (Теорема 4.5.8 из [1]). *Имеются изоморфизмы групп*

$$H^l(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}^{l-|J|-1}(\mathcal{K}_J)$$

и изоморфизм колец $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus\limits_{J \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_J)$, где структура умножения в кольце справа задается каноническими отображениями

$$H^{k-|I|-1}(\mathcal{K}_I) \otimes H^{l-|J|-1}(\mathcal{K}_J) \longrightarrow H^{k+l-|I|-|J|-1}(\mathcal{K}_{I \cup J}),$$

индуцированными симплициальными отображениями $\mathcal{K}_{I \cup J} \to \mathcal{K}_I * \mathcal{K}_J$ в случае $I \cap J = \varnothing$ и нулем иначе.

Будем обозначать $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$ кольцо $\bigoplus\limits_{J \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_J)$ с указанной выше структурой. Соответственно, определим $\mathcal{H}^{l,J} = \widetilde{H}^l(\mathcal{K}_J)$, $\mathcal{H}^{*,J} = \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_J)$ и $\mathcal{H}^{l,*} = \bigoplus\limits_{J \subset [m]} \widetilde{H}^l(\mathcal{K}_J)$.

Следствие 2.6. *Если размерности всех симплексов $\mathcal{K}$ не превосходят n, то когомологическая длина $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ не превосходит $n+1$.*

Доказательство. Пусть есть r элементов $c_i \in H^{l_i}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ таких, что $c_1 \cdot \ldots \cdot c_r = c \neq 0$. Тогда по теореме выше каждому c_i соответствует элемент $\hat{c}_i \in \widetilde{H}^{l_i-|J_i|-1}(\mathcal{K}_{J_i})$ для некоторого $J_i \subset [m]$, а элементу c соответствует $\hat{c} \in \widetilde{H}^l(\mathcal{K}_J)$, причём $\hat{c}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{c}_r = \hat{c} \neq 0$ и соответственно $l = (\Sigma_{i=1}^r l_i - |J_i|) - 1$, а $J = J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_r$. Заметим, что $l_i - |J_i| - 1 \geq 0$ (так как это размерности $\hat{c}_i$), при этом по условию $\mathcal{K}$ не содержит симплексов размерности больше n, следовательно $l \leq n$. Получаем неравенство $n \geq j = (\Sigma_{i=1}^r l_i - |J_i|) - 1 \geq r - 1$, а значит $n + 1 \geq r$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 2.7 (Теорема 4.6.12 из [1]). *Пусть $\mathcal{K}$ — граница стекового многогранника размерности n с $m > n+1$ вершинами. Тогда соответствующее момент-угол многообразие гомеоморфно связной сумме произведений сфер,*

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong \mathop{\#}_{k=3}^{m-n+1} (S^k \times S^{m+n-k})^{\#(k-2)C_{m-n}^{k-1}}$$

Заметим, что любой двумерный многогранник является двойственным к стековому, поэтому соответствующие многоугольникам момент-угол-комплексы являются связными суммами произведений пар сфер.

3 Основные результаты. Многогранники.

Определение 3.1. *Назовём элемент $c \in \widetilde{H}^l(\mathcal{K}_J)$ неразложимым, если он не представляется в виде $c = \Sigma_{i=1}^p a_i \cdot b_i \neq 0$, элементы $a_i \in \widetilde{H}^{r_i}(\mathcal{K}_{I_i})$, $b_i \in \widetilde{H}^{l-1-r_i}(\mathcal{K}_{J\setminus I_i})$ ненулевые, $0 \leq r_i \leq l-1$, и $I_i \subset J$ — собственные подмножества.*

Если же элемент $c \in \widetilde{H}^l(\mathcal{K}_J)$ представляется в вышеуказанном виде, будем называть его разложимым.

Докажем вспомогательный факт, интересный сам по себе:

Лемма 3.2 (Обобщение леммы 4.4 из [3]). *Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_k \in MF_l(\mathcal{K})$ — недостающие грани $\mathcal{K}$, $|\Delta_i| = l+1$, $i = 1, \ldots, k$, и пусть соответствующие им классы когомологий $d_1, \ldots, d_k \in \widetilde{H}^{l-1}(\mathcal{K}_J)$ нетривиальны для некоторого J. Тогда класс когомологий $c = d_1 + \ldots + d_k \in \widetilde{H}^{l-1}(\mathcal{K}_J)$ неразложим.*

Доказательство. Докажем это от противного, предположив разложимость c.

Рассмотрим комплекс $\mathcal{K}'$, полученный из $\mathcal{K}$ заклеиванием всех недостающих граней размера $l+1$, то есть $MF_l(\mathcal{K}') = \varnothing$. Тогда вложение $i : \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{K}'$ индуцирует гомоморфизм колец $i^* : \mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K}') \to \mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$, причём в размерностях $r \leq l-2$ это будет изоморфизм $\mathcal{H}^{r,*}(\mathcal{K}') \cong \mathcal{H}^{r,*}(\mathcal{K})$, так как $\mathrm{sk}^{l-1}(\mathcal{K}) = \mathrm{sk}^{l-1}(\mathcal{K}')$.

Поэтому все элементы a_i, b_i имеют прообразы a_i', b_i', то есть $i^*(a_i') = a_i$ и $i^*(b_i') = b_i$; при этом $i_*(\Delta_i) = 0$. Тогда рассмотрим элемент $c' := \Sigma_{i=1}^{p} a_i' \cdot b_i'$. Так как i^* — гомоморфизм колец, то $i^*(c') = c$, однако $1 = c(\Delta_i) = i^*(c')(\Delta_i) = c'(i_*(\Delta_i)) = c'(0) = 0$, получили противоречие. Соответственно, элемент c является неразложимым. □

Аналогично доказывается следующее утверждение:

Предложение 3.3. *Пусть $\Delta \in MF_l(\mathcal{K})$ — недостающая грань, и пусть соответствующий ей класс когомологий $d \in \widetilde{H}^{l-1}(\mathcal{K}_J)$ нетривиален. Тогда любой класс когомологий вида $c = \lambda \cdot d + h \in \widetilde{H}^{l-1}(\mathcal{K}_J)$, где $\lambda \neq 0$ и $h(\Delta) = 0$, является неразложимым.*

Перед тем как сформулировать основной результат данного раздела (3.4), дадим некоторую его мотивировку.

В моей прошлогодней курсовой работе [5] было доказано, что для трёхмерного многогранника P эквивалентны следующие условия:

а) 1-остов $\mathcal{K}_P$ — хордовый граф;

б) $H^*(\mathcal{Z}_P) \cong H^*(M)$, где M — связная сумма произведений сфер;

в) $\mathcal{Z}_P \cong M$, где M — связная сумма произведений пар сфер.

Также показывалось, что для многогранников размерности пять и выше условия (а) уже недостаточно для того, чтобы выполнялись условия (б) и (в).

Вопрос о том, как связаны эти условия в случае четырёхмерных многогранников, оставался открытым. И следующее утверждение частично даёт ответ на этот вопрос:

Теорема 3.4. *Пусть P — четырёхмерный простой многогранник такой, что 1-остов $\mathcal{K}_P$ — хордовый граф. Тогда $H^*(\mathcal{Z}_P) \cong H^*(M)$, где M — связная сумма произведений пар сфер.*

Доказательство. Рассмотрим, опираясь на 2.5, какие классы когомологий $\mathcal{Z}_P$ могут перемножаться нетривиально.

Умножения вида $\mathcal{H}^{3,*}(\mathcal{K})\otimes\mathcal{H}^{i,*}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{H}^{4+i,*}(\mathcal{K})$, $\mathcal{H}^{2,*}(\mathcal{K})\otimes\mathcal{H}^{2,*}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{H}^{5,*}(\mathcal{K})$ и $\mathcal{H}^{2,*}(\mathcal{K})\otimes\mathcal{H}^{1,*}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{H}^{4,*}(\mathcal{K})$ тривиальны по соображениям размерности, т.к. $\mathcal{K}_P$ — трехмерная сфера.

Умножения $\widetilde{H}^i(\mathcal{K}_I) \otimes \widetilde{H}^{2-i}(\mathcal{K}_J) \longrightarrow \widetilde{H}^3(\mathcal{K}_{I\cup J})$ «продиктованы» двойственностью Пуанкаре: $|\mathcal{K}_P| \cong S^3$, поэтому из 2.4 и 2.5 следует, что эти умножения нетривиальны тогда и только тогда, когда $J = [m] \setminus I$, а также для любой образующей a из $\widetilde{H}^i(\mathcal{K}_I)$, $i = 0,1$ существует единственная образующая b из $\widetilde{H}^{2-i}(\mathcal{K}_{[m]\setminus I})$, что $0 \neq a \cdot b = c$, где c — фундаментальный класс $\mathcal{K}$. Примечание: группы $\widetilde{H}^i(\mathcal{K}_I)$, $i = 0,1$ не имеют кручений, поэтому мы действительно имеем изоморфизм $\widetilde{H}^i(\mathcal{K}_I) \cong \widetilde{H}^{2-i}(\mathcal{K}_{[m]\setminus I})$, задаваемый двойственностью Пуанкаре.

Докажем теперь, что все умножения вида $\mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{H}^{1,*}(\mathcal{K})$ и $\mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{H}^{1,*}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{H}^{2,*}(\mathcal{K})$ тривиальны.

Заметим, что достаточно доказать тривиальность всех умножений вида $\mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K})\otimes \mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{H}^{1,*}(\mathcal{K})$, так как если есть нетривиальное умножение $\alpha^0 \cdot \beta^1 = \gamma^2 \neq 0$ для каких-то классов $\alpha^0 \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I)$, $\beta^1 \in \widetilde{H}^1(K_J)$, $\gamma^2 \in \widetilde{H}^2(\mathcal{K}_{I\cup J})$, то по двойственности Пуанкаре найдется элемент $\alpha' \in \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{[m]\setminus(I\cup J)})$ такой, что $0 \neq \alpha' \cdot \gamma^2 = \alpha' \cdot \alpha^0 \cdot \beta^1 \in \widetilde{H}^3(\mathcal{K})$, а следовательно и $\alpha^0 \cdot \alpha' \neq 0$ — значит, есть нетривиальное умножение и в $\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I) \otimes \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_J) \longrightarrow \widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{I\cup J})$.

Проведем доказательство от противного: пусть есть два класса $a, b \in \mathcal{H}^{*,0}(\mathcal{K})$ такие, что $0 \neq a \cdot b = c \in \mathcal{H}^{1,*}(\mathcal{K})$. Любая одномерная цепь гомологична сумме простых циклов, поэтому c раскладывается в сумму $c = d_1 + \ldots + d_k$, где d_i — коциклы, соответствующие каким-то простым циклам в графе $(\mathcal{K})^1$. Однако 1-остов $\mathcal{K}$ — хордовый граф, а значит, все простые циклы в $(\mathcal{K})^1$ имеют меньше 4-х вершин. Это равносильно тому, что все простые циклы являются недостающими гранями, в частности и $d_i \in MF_2(\mathcal{K})$, а значит, по лемме 3.2 класс c не может быть разложимым, получили противоречие.

Следовательно, все умножения в $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$ тривиальны, кроме тех, которые задаются двойственностью Пуанкаре. В таком случае $H^*(\mathcal{Z}_P)$ является кольцом, порождаемым элементами $\{a_i^r, b_i^{2-r}, c \mid r = 0,1,\ i = \ldots\}$, которые умножаются по правилу $a_i^k \cdot b_j^l = \delta_{ij}\delta_{k,2-l}c$ (где $\delta_{ij}, \delta_{k,2-l}$ — символы Кронекера), то есть как раз совпадает с кольцом когомологий связной суммы произведений пар сфер. Получили желаемое. □

Из леммы 3.2 и доказательства теоремы 3.4 возникает очевидное следствие:

Следствие 3.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — такая симплициальная сфера размерности n, что кольца $\mathcal{H}^{l,*}(\mathcal{K})$ для $l \leq \left[\frac{2n-1}{3}\right]$ порождается недостающими гранями $\mathcal{K}$. Тогда $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений пар сфер.*

Действительно, ведь из указанного условия следует, что никакие три элемента в $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$ не могут перемножаться нетривиально.

4 Основные результаты. Сферы.

Теорема 4.1. *Пусть* $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(M)$, *где* $M = S^{p_1} \times \ldots \times S^{p_n}$ *— произведение сфер.*

Тогда $\mathcal{K} = \partial\Delta^{q_1} * \ldots * \partial\Delta^{q_r} * \Delta^a$ *— джойн границ симплексов и быть может еще одного симплекса.*

Доказательство. Докажем этот факт от противного.

Пусть $\mathcal{K} \neq \partial\Delta^{q_1} * \ldots * \partial\Delta^{q_r} * \Delta^a$, тогда $\mathcal{K}$ имеет смежные недостающие грани I_1, I_2, то есть $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$ и $I_1, I_2 \in MF(\mathcal{K})$. Обозначим $|I_i| = k_i$, $i = 1, 2$.

Для $i = 1, 2$ обозначим α_i образующую $\widetilde{H}^{k_i-2}(\mathcal{K}_{I_i})$, а соответствующую ей образующую в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ обозначим как a_i, $\deg(a_i) = (k_i - 2) + |I_i| + 1 = 2k_i - 1$.

Случай 1 (простой): если $k_1 \neq k_2$, то положим $\beta := \alpha_2$, $b := a_2$. Можем считать без ограничения общности, что $k_2 > k_1$, тогда $\deg(b) > \deg(a_1)$.

Случай 2 (сложный): если $k_1 = k_2$, то рассмотрим $J := I_1 \cup I_2$. Заметим, что любая недостающая грань I полного подкомплекса $\mathcal{K}_J$ пересекается одновременно и с I_1, и с I_2.

Тогда, если $I \in MF(\mathcal{K}_J)$ и $|I| \neq k_1$, то рассмотрим пару смежных недостающих граней I_1 и I (вместо I_1 и I_2) — это ситуация из случая 1, действуем как в случае 1.

Если же любая недостающая грань $\mathcal{K}_J$ имеет k_1 вершин, то имеется полный подкомплекс $\mathcal{L} = \mathcal{K}_{I_{1'} \cup I_{2'}} \subset \mathcal{K}_J$, где $I_{1'}$ и $I_{2'}$ — какие-то недостающие грани $\mathcal{K}_J$ (мощности k_1 соответственно), являющийся нетривиальным букетом сфер, причем все сферы имеют размерность $\geq k_1 - 2$, так как $\mathcal{L}$ содержит свой полный $(k_1 - 2)$-остов; доказательство этого факта вынесено в лемму 4.2.

Тогда для некоторого $k \geq k_1$ верно $\widetilde{H}^{k-2}(\mathcal{L}) \neq 0$, поэтому возьмем оттуда любой ненулевой элемент β и обозначим b соответствующий ему элемент в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$; так как $|I_{1'} \cap I_{2'}| \leq |I_{1'}| - 1 = k_1 - 1$, то $\deg(b) = (k - 2) + |I_{1'} \cup I_{2'}| + 1 = (k - 2) + (2k_1 - |I_{1'} \cap I_{2'}|) + 1 \geq k + k_1 > 2k_1 - 1$.

Таким образом, есть нетривиальные элементы $a_1, b \in H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, $q := \deg(b) > \deg(a_1) =: p$, и $b \cdot a_1 = 0$, так как I_1 и I_2 (в случае 1) или I_1 и J (в случае 2) пересекаются по непустому множеству.

Заметим, что элементы α_1 и β неразложимы в смысле определения 3.1. Для α_1 это непосредственно следует из леммы 3.2, так как α_1 соответствует недостающей грани $\mathcal{K}$. В случае 1 элемент β тоже соответствует недостающей грани $\mathcal{K}$, а для случая 2 доказательство неразложимости β вынесем в отдельную лемму 4.4.

Если разложить любой элемент $c \in H^p(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ по базису мультипликативных образующих, то c будет иметь вид:

$$c = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i \, e_i^p + \sum_{j=1}^{m_2} \mu_j \, e_1^{p_{j,1}} \times \ldots \times e_{n_j}^{p_{j,n_j}}, \quad \lambda_i \neq 0,\ \mu_j \neq 0,\ \ m_1, m_2 \geq 0\ ,$$

где коцепи e_i^q в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(M)$ соответствуют сферам S_i^q в M.
Пусть $\gamma \in \mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$ — элемент, которому соответствует $c \in H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Тогда неразложимость γ равносильна тому, что $m_1 > 0$ (очевидно, что свойство элемента быть неразложимым сохраняется при изоморфизме колец, так как неразложимость элемента x, $\deg(x) = d$, равносильна наличию образующих степени d в разложении x по базису мультипликативных образующих и это не зависит от выбора базиса мультипликативных образующих; кольца $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K}) \cong H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(M)$ изоморфны, а неразложимость c равносильна $m_1 > 0$).

Тогда, в силу неразложимости α_1 и β, элементы $a_1, b \in H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(M)$ тоже неразложимы и представляются в виде:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i \, e_i^p + h_1, \quad b = \sum_{j=1}^{m_2} \mu_j \, e_j^q + h_2, \quad \lambda_i \neq 0,\ \mu_j \neq 0,\ m_1, m_2 > 0,$$

где h_1, h_2 — разложимые элементы, то есть суммы произведений каких-то образующих e_s^r, где каждое слагаемое имеет *не менее двух множителей.*

Поэтому получаем, что

$$0 = b \cdot a_1 = \Sigma \lambda_i \mu_j \, e_i^p \cdot e_j^q + h_1 \cdot \left(\sum_{j=1}^{m_2} \mu_j \, e_j^q \right) + h_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i \, e_i^p \right) + h_1 \cdot h_2 \neq 0,$$

так как никакое слагаемое $e_i^p \cdot e_j^q$ не сократится, ведь все они различны (для каждой пары i, j существует ровно одно слагаемое такого вида), и все ненулевые, так как $p \neq q$, и значит никакие сферы e_i^p и e_j^q не равны, а каждое слагаемое коцепи $h = h_1 \cdot \left(\sum_{j=1}^{m_2} \mu_j \, e_j^q \right) + h_2 \cdot (\sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i \, e_i^p) + h_1 \cdot h_2$ содержит *минимум три множителя*, поэтому они не могут сократиться со слагаемыми $e_i^p \cdot e_j^q$, в которых по два множителя.

Получили противоречие $0 \neq 0$, последовавшее из предположения о существовании двух смежных недостающих граней. Утверждение теоремы доказано. □

Осталось доказать две обещанные леммы, доказательство довольно техническое.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве вершин $[k+l]$, и все недостающие грани $\mathcal{K}$ имеют мощность k. Пусть $I_1 = \{1, \ldots, k\} \in MF(\mathcal{K})$ и $I_2 = \{l+1, \ldots, k+l\} \in MF(\mathcal{K})$ — недостающие грани. Тогда найдётся полный подкомплекс $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, содержащий хотя бы две недостающие грани, и имеющий гомотопический тип нетривиального букета сфер размерности $\geq k-2$.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по мощности пересечения $|I_1 \cap I_2| = k - l$.

База индукции будет при $l = 1$, соответственно, когда $|I_1 \cap I_2| = k - 1$. В таком случае $\mathcal{K}$ — это $\partial\Delta^k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{p} \Delta_i^{k-1}$, где объединение идёт по недостающим граням $\mathcal{K}$, и $p \geq 2$, так как $\mathcal{K}$ имеет минимум 2 недостающие грани I_1 и I_2, а значит, $\mathcal{K}$ — это S^{k-1} с $p \geq 2$ дырками, то есть нетривиальный букет S^{k-2}. База доказана.

Шаг: пусть утверждение верно для всех $l < l_0$, докажем его и для $l = l_0$ (соответственно, $|I_1 \setminus I_2| = l_0$). Пусть I — недостающая грань $\mathcal{K}$, не совпадающая с $I_i,\ i = 1, 2$. Обозначим

$$r_1 = |I \cap (I_1 \setminus I_2)|, \quad r_2 = |I \cap (I_2 \setminus I_1)|, \quad r = |I \cap (I_1 \cap I_2)|\,.$$

Так как $I_1 \cup I_2 = [k + l_0]$, то $I \subset I_1 \cup I_2$ и следовательно $|I| = r + r_1 + r_2$, при этом $I \in MF(\mathcal{K})$ и все недостающие грани $\mathcal{K}$ имеют мощность k, получаем $k = r + r_1 + r_2$. Давайте заметим, что если $|I \cap I_1| = r_1 + r > k - l_0 \iff |I \setminus I_1| = r_2 < l_0$, то мы можем спуститься на предыдущий шаг индукции, взяв I_1 и I вместо I_1 и I_2, и работать с комплексом $\mathcal{L} := \mathcal{K}_{I_1 \cup I} \subset \mathcal{K}$. Аналогично со случаем $|I \cap I_2| = r_2 + r > k - l_0$. Действуем так же, если в $\mathcal{K}$ имеется 2 другие недостающие грани с пересечением мощности $> k - l_0$.

Если же все недостающие грани $I \in MF(\mathcal{K})$ таковы, что $r_i \geq l_0$, то получается, что $r_i = l_0$, так как тогда $l_0 \leq r_1 = |I \cap (I_1 \setminus I_2)| \leq |I_1 \setminus I_2| = l_0 \implies l_0 \leq r_1 \leq l_0$. Это возможно только при $k \geq 2l_0$, но это не повлияет на доказательство. Таким образом, любая недостающая грань $I \in MF(\mathcal{K})$ такова, что

$$|I \setminus I_1| = |I \cap (I_2 \setminus I_1)| = r_2 = l_0 = |I_2 \setminus I_1| = |[k + l_0] \setminus I_1|,$$

а следовательно $|I \cup I_1| = |I_1| + |I \setminus I_1| = k + l_0$, то есть $I \cup I_1 = [k+l_0]$, аналогично выполнено $I \cup I_2 = [k+l_0]$, а также $I \cup I' = [k+l_0]$ для любых двух недостающих граней I и I'.

$$\begin{gathered}\text{Из этого следует, что если какое-то подмножество } A \\ \text{содержит обе недостающие грани } I \text{ и } I', \text{ то } A = [k + l_0]\,.\end{gathered} \tag{1}$$

Итак, давайте поймем, каков гомотопический тип $\mathcal{K}$. Пусть $MF(\mathcal{K}) = \{I_1, I_2, \ldots, I_p\}$ — недостающие грани $\mathcal{K}$; по доказанному ранее $I_i \cup I_j = [k + l_0]$. $\mathcal{K}$ получается из $\partial\Delta^{k+l_0-1}$ выкидыванием симплексов, то есть $\mathcal{K} = \partial\Delta^{k+l_0-1} \setminus M$, где M — какое-то объединение симплексов. Какие симплексы не содержатся в $\mathcal{K}$? Ровно такие, которые содержат I_i для некоторого $i = 1, \ldots, p$ как подмножество. Будем считать, что все подмножества J в $[k + l_0]$ пронумерованы индексом α, тогда обозначим

$$A_i = \{\alpha : \; I_i \subset J_\alpha, \; |J_\alpha| < k + l_0\}, \quad M_i = \bigcup_{\alpha \in A_i} \mathrm{int}(\Delta_\alpha), \quad i = 1, \ldots, p,$$

где $\mathrm{int}(\Delta_\alpha)$ — внутренние точки соответствующего J_α симплекса Δ_α.

Заметим, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ и $M_i \cap M_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$, так как только всё множество $[k + l_0]$ может содержать две различные недостающие грани одновременно (1), а $|J_\alpha| < k + l_0 \; \forall \alpha \in A_i$, и любая точка $x \in M_i$ — это внутренняя точка некоторого симплекса Δ_α, а значит $\alpha \in A_i$ и $\alpha \notin A_j$.

Заметим также, что все M_i стягиваемы, так как любая точка $x \in M_i$ представляется в виде выпуклой суммы

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots + t_{k+l_0} v_{k+l_0}, \quad \text{где} \sum_{j=1}^{k+l_0} t_j = 1, \; t_j \geq 0,$$

а $v_1, \ldots, v_{k+l_0}$ — вершины объемлющего симплекса Δ^{k+l_0-1}. Также для некоторого $j_0 \notin I_i$ выполнено $t_{j_0} = 0$ и $t_j > 0$ для всех $j \in I_i$, потому что $x \in \overline{\Delta_\alpha}$ для некоторого $\alpha : \; |J_\alpha| = k + l_0 - 1, \; J_\alpha = [k + l_0] \setminus \{j_0\}, \; I_i \subset J_\alpha$, при этом если $t_j = 0$ для некоторого $j \in I_i$, то получится, что $x \in \mathrm{int}(\Delta_\beta) \subset \overline{\Delta_\alpha}$ и $j \notin J_\beta \Longrightarrow I_i \not\subset J_\beta$, что противоречит $x \in M_i$. Тогда можно рассмотреть следующую гомотопию $F_\tau, \; \tau \in [0, 1]$:

$$F_\tau : \sum_{j=1}^{k+l_0} t_j v_j \mapsto \sum_{j=1}^{k+l_0} \alpha_j t_j v_j, \text{ где } \alpha_j = \tau \text{ при } j \notin I_i \text{ и } \alpha_j = \frac{1 - \tau \Sigma_{j \notin I_i} t_j}{\Sigma_{j \in I_i} t_j} \text{ при } j \in I_i.$$

Гомотопия непрерывна в силу условия $t_j > 0$ для всех $j \in I_i$ и $F_1 = \mathrm{id}$, а F_0 — проекция M_i на симплекс $\mathrm{int}(\Delta_i)$, т.е. $F_0(M_i)$ стягиваемо, а значит и M_i стягиваемо.

Более того, заметим, что $M_i \cap \overline{M_j} = \varnothing = \overline{M_i} \cap M_j$ для любых $i \neq j$, то есть $M_i \cup M_j$ имеет две компоненты связности, а не одну. Действительно, обозначим $M_i' = \mathrm{int}(M_i)$ и $N_i = M_i \setminus M_i'$, то есть

$$M_i' = \bigcup_{\alpha \in A_i : \; |J_\alpha| = k + l_0 - 1} \mathrm{int}(\Delta_\alpha), \qquad N_i = \bigcup_{\alpha \in A_i : \; |J_\alpha| < k + l_0 - 1} \mathrm{int}(\Delta_\alpha).$$

В таком случае заметим, что при доказанном условии $M_i \cap M_j = \varnothing$ утверждение $M_i \cap \overline{M_j} \neq \varnothing \iff \exists x \in N_i \cap (\partial M_j \setminus N_j)$. То есть $x \in \mathrm{int}(\Delta_\alpha)$ для некоторого $\alpha \in A_i$, $|J_\alpha| < k + l_0 - 1$ и при этом $x \in \Delta_\beta$ для некоторого $\beta \notin A_j$ такого, что $\Delta_\beta \subset \partial \Delta_\gamma$, где $|\Delta_\gamma| = k + l_0 - 1$, $\gamma \in A_j$. Значит, $\mathrm{int}(\Delta_\alpha) \cap \Delta_\beta \neq \varnothing$, тогда $\mathrm{int}(\Delta_\alpha) \subset \Delta_\beta$. Но тогда получаем, что $I_i \subset J_\alpha \subset J_\beta$, в то же время $\Delta_\beta \subset \partial \Delta_\gamma \implies J_\beta \subset J_\gamma \supset I_j$, итого получаем, что $I_i \subset J_\alpha \subset J_\beta \subset J_\gamma \supset I_j$, то есть $I_i \cup I_j \subset J_\gamma$, что противоречит $|J_\gamma| < k + l_0$ (1). Итак, данное утверждение тоже доказано.

Теперь с учетом всего вышеперечисленного (и обозначив как B^{k+l_0-2} открытый шар размерности $k + l_0 - 2$), получаем:

$$\mathcal{K} = \partial \Delta^{k+l_0-1} \setminus \bigsqcup_{i=1}^{p} M_i \cong \partial \Delta^{k+l_0-1} \setminus \bigsqcup_{i=1}^{p} B^{k+l_0-2} \simeq \bigvee_{i=1}^{p-1} S_i^{k+l_0-3} \tag{2}$$

Получаем, что $\mathcal{K}$ — нетривиальный букет сфер размерности $k + l_0 - 3 \geq k - 2$, шаг индукции сделан. Что и требовалось доказать. □

Замечание 4.3. *Утверждения (1) и (2) очевидно верны и для базы индукции $l = 1$, поэтому мы будем пользоваться ими при доказательстве следующей леммы без дополнительных оговорок.*

Лемма 4.4. *В условиях и обозначениях леммы 4.2 любой элемент $\beta \in \mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{L})$ «неразложим» в смысле леммы 3.2.*

Доказательство. Вспомним, что для любых $l = 1, \ldots, k-1$ искомый в 4.2 комплекс $\mathcal{L}$ имеет вид (2):

$$\mathcal{L} \simeq \bigvee_{i=1}^{p-1} S_i^{k+l-3},$$

а также все недостающие грани $\mathcal{L}$ имеют мощность k, попарно пересекаются, и по утверждению (1) только всё множество $[k+l]$ может содержать две недостающие грани $\mathcal{L}$ одновременно.

В таком случае легко понять, что из себя представляет $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{L})$:

1. Пусть $J \subsetneq [k+l]$, тогда J содержит не более одной недостающей грани. Если J не содержит недостающих граней вообще, то полный подкомплекс $\mathcal{L}_J$ — это просто симплекс, и подкольцо $\mathcal{H}^{*,J}(\mathcal{L})$ тривиально.
   Если же J содержит ровно одну недостающую грань I, то $\mathcal{L}_J$ — это джойн симплекса $\mathcal{L}_{J \setminus I}$ и сферы $\mathcal{L}_I \simeq S^{k-2}$, тогда при $J \setminus I \neq \varnothing$ это конус, то есть стягиваемое пространство, и $\mathcal{H}^{*,J}(\mathcal{L})$ тривиально, а при $J = I$ это сфера, тогда $\mathcal{H}^{*,J}(\mathcal{L})$ содержит единственный нетривиальный элемент α_I, $\deg(\alpha_I) = k - 2$, соответствующий недостающей грани I.

2. Пусть $J = [k+l]$, тогда $\mathcal{H}^{*,[k+l]}(\mathcal{L}) = \widetilde{H}^*(\mathcal{L}) = \langle \gamma_i | \deg(\gamma_i) = k+l-3, \ i = 1, \ldots, p-1 \rangle$ — линейная оболочка образующих γ_i, соответствующих сферам в букете $\mathcal{L}$.

Итак, $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{L})$ порождается элементами α_I и γ_i, причём *все произведения в* $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{L})$ *тривиальны*, а значит, разложимых элементов в $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{L})$ быть не может.

Действительно, согласно теореме 2.5 произведение элементов может быть ненулевым только в том случае, если соответствующие подкомплексы имеют пустое пересечение. Соответственно, $\alpha_I \cdot \alpha_{I'} = 0$, так как все недостающие грани $\mathcal{L}$ попарно пересекаются, а $\gamma_i \cdot \gamma_j = 0$ и $\alpha_I \cdot \gamma_i = 0$, так как $\gamma_i \in \mathcal{H}^{*,[k+l]}(\mathcal{L})$ и для любого непустого J пересечение $J \cap [k+l]$ будет непусто.

Утверждение доказано. □

Определение 4.5. *Простой многогранник P называется B-жёстким, если любой изоморфизм колец когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P) = H^*(\mathcal{Z}_{P'})$ момент-угол-многообразий влечёт комбинаторную эквивалентность $P \cong P'$.*

С учетом данного определения теорема 4.1 имеет следствие:

Следствие 4.6. *Многогранники вида*

$$P = \Delta^{q_1} \times \ldots \times \Delta^{q_r} \iff \mathcal{K}_P = \partial\Delta^{q_1} * \ldots * \partial\Delta^{q_r},$$

то есть произведения симплексов, являются B-жёсткими.

Замечание 4.7. *В недавней работе С.Амелотта и Б.Бриггса [4, теорема 3.2] доказан красивый результат для Горенштейновых симплициальных комплексов, из которого в частности следуют результаты 4.6 и 4.1. Несмотря на то, что утверждение 4.1, напрямую не требует Горенштейновости от симплициального комплекса $\mathcal{K}$, по условию $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(M)$ — алгебра Пуанкаре, тогда по теореме 2.4 комплекс $\mathcal{K}$ автоматически будет Горенштейновым.*

Тем не менее, этот результат доказан другими методами.

5 Благодарности

Выражаю огромную благодарность моему научному руководителю Панову Тарасу Евгеньевичу за чуткое руководство, помощь и поддержку, за постановку задач и продуктивное обсуждение.

Также большое спасибо коллективу F.Fan, L.Chen, J.Ma, X.Wang за вдохновляющие работы.

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, «Toric Topology», Mathematical Surveys and Monographs 204, American Mathematical Society, 2015.

[2] D. R. Fulkerson, O. A. Gross, «Incidence matrices and interval graphs» , Pacific J.Math, 15:3 (1965), 835–855.

[3] Feifei Fan, Liman Chen, Jun Ma, Xiangjun Wang, «Moment-angle manifolds and connected sums of sphere products» arXiv:1406.7591.pdf

[4] Steven Amelotte, Benjamin Briggs, «Product decompositions of moment-angle manifolds and B-rigidity Steven Amelotte, Benjamin Briggs» arxiv:2205.00337.pdf

[5] В. Оганисян (Ковыршина), «Момент-угол-комплексы, простые многогранники и связные суммы произведений сфер»