МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Башни Ботта и свойство когомологической жесткости

Работу выполнил:
Студент 303 группы
Мамаева Аида

Научный руководитель:
Панов Тарас
Евгеньевич

Москва, 2021 г.

1 Введение

Семейство замкнутых многообразий называется когомологически жестким, если изоморфизм колец когомологий влечет диффеоморфизм для любых двух многообразий из этого семейства.
Для семейства торических многообразий вопрос их когомологической жесткости является открытым. Более того, проблема не решена и для их частного случая - башен Ботта (проективные торические многообразия над кубом).
В данной работе, опираясь на [1], представлены решения поставленной задачи для случаев тривиальной башни и башни высоты 2. Также, в 4 разделе предоставлено модифицированное доказательство теоремы из [2] о когомологической жесткости башен с одной подкруткой.

2 Башни Ботта

Определение 1. *Башней Ботта высоты n называется башня расслоений комплексных многообразий:*

$$B_n \xrightarrow{p_n} B_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} ... \to B_2 \xrightarrow{p_2} B_1 \xrightarrow{p_1} pt,$$

где $B_1 = \mathbb{C}P^1$ и $B_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{k-1})$ для $2 \leq k \leq n$, $\mathbb{C}P(.)$ - комплексная проективизация, ξ_{k-1} - 1-комплексное расслоение над B_{k-1}, $\underline{\mathbb{C}}$ - тривиальное расслоение.

Определение 2. *Башня Ботта B_n назыв. топологически тривиальной, если каждое расслоение $p_k : B_k \to B_{k-1}$ тривиально.*

Замечание 1. *Тривиальная башня Ботта диффеоморфна $(\mathbb{C}P^1)^n$. (Последнюю ступень расслоения B_n башни высоты n будем также называть башней Ботта.)*

Из стандартных результатов о когомологиях проективизации векторных расслоений следует теорема:

Теорема 1 ([1]). *$H^*(B_n)$ есть свободный модуль над $H^*(B_{n-1})$ с образующими 1 и u_n, где u_n - тавтологическое расслоение над B_n. Причем кольцевая структура на $H^*(B_n)$ задается соотношением:*

$$u_n^2 - c_1(\xi_{n-1})u_n = 0.$$

Или $H^*(B_n) = H^*(B_{n-1})[u_n]/u_n^2 - c_1(\xi_{n-1})u_n$.
Проекция p_n индуцирует инъективное отображение:

$$p_k^* : H^*(B_{n-1}) \to H^*(B_n)$$

Тогда $p_{n-1}^*(u_{n-1}) \in H^*(B_n)$ будем обозначать u_{n-1}.

$$c_1(\xi_{k-1}) \in H^2(B_{k-1}) \Rightarrow c_1(\xi_{k-1}) = a_{1,k}u_1 + ... + a_{k-1,k}u_{k-1} \; u_k^2 = \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k}u_iu_k (*)$$

По индукции получаем, что:

$$H^*(B_n) = H^*(B_{n-1})[u_n]/(*)$$

$$\text{A} = \begin{pmatrix} -1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Теорема 2 ([1]). *Многообразие Ботта B_n изоморфно торическому многообразию V_Σ, где Σ - полный веер с $2n$ образующими:*

$$a_k^0 = e_k \text{ и } a_k^1 = -e_k + a_{k,k+1}e_{k+1} + a_{k,n}e_n (1 \leq k \leq n)$$

и 2^n конусами вида $\sigma^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = cone(a_1^{\epsilon_1}, \ldots, a_n^{\epsilon_n})$, где $\epsilon = 0, 1$.

Доказательство. 1) $B_1 = \mathbb{C}P^1$, $\Sigma = \{\mathbb{R}_{\geq 0} < e_k >, \mathbb{R}_{\geq 0} < -e_k >\} \Rightarrow X_1 = \mathbb{C}P^1$.
2) Построим $X_n = U_n/G_n$, используя конструкцию Батырева-Кокса:

$$a_1^0, \ldots a_n^0, a_1^1, \ldots a_n^1$$

- примитивные образующие веера Σ
Рассмотрим матрицу $A_1 = (E|A^t)$, тогда:

$$G_n = \{(z_1, \ldots z_{2n}) \in (\mathbb{C}^\times)^{2n} | z_k z_{n+1}^{a_{1,k}} \ldots z_{n+k-1}^{a_{k-1,k}} z_{n+k}^{-1} = 1, \forall k = 1, \ldots, n\} =$$

$$= \{(\mathrm{t}_1, \ldots, \Pi_{i=1}^{k-1} t_i^{-a_{i,k}} t_k, \ldots, t_1, \ldots, t_n)\} \cong (\mathbb{C}^\times)^n$$

$$U_n = \{z \in C^{2n} : |z_k|^2 + |z_{n+k}|^2 \neq 0\} \cong (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^n$$

Обратим внимание на то, что $U_n = U_{n-1} \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$, $G_n = G_{n-1} \times \mathbb{C}^\times$ и $\mathbb{C}^\times$ (соответствующее компоненте t_n) действует на U_{n-1} тривиально. Тогда:

$$X_n = U_n/G_n = (U_{n-1} \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}))/G_{n-1} \times \mathbb{C}^\times = U_{n-1} \times ((\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times)/G_{n-1} =$$

$= \mathrm{U}_{n-1} \times \mathbb{C}P^1/G_{n-1} = U_{n-1} \times_{G_{n-1}} \mathbb{C}P^1$
Зададим на $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ действие группы G_{n-1}: $(t_1, ..., t_{n-1})(z_1, z_2) = (z_1 t_1^{-a_{1,n}} ... t_{n-1}^{-a_{n-1,n}}, z_2)$.
Тогда из расслоения $U_{n-1} \to X_{n-1}$ получаем расслоение $U_{n-1} \times_{G_{n-1}} (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \to X_{n-1}$.

$$\mathbb{C}P(U_{n-1} \times_{G_{n-1}} (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})) = U_{n-1} \times_{G_{n-1}} \mathbb{C}P^1 = X_n.$$

Из тривиального действия группы G_{n-1} на $\mathbb{C}$ получаем, что $U_{n-1} \times_{G_{n-1}} (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = \xi \oplus \underline{\mathbb{C}}$.
Покажем, что $\xi_{n-1} = \xi$. Т.к. эти расслоения линейны, достаточно показать равенство их первых классов Чженя:

$$c_1(\xi_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,n} u_i u_n,$$

$c_1(\xi) = c_1(\xi \oplus \underline{\mathbb{C}})$ найдем из Теоремы 1(которая в общем случае может быть принята за альтернативное определение классов Чженя).
$H^*(X_n) = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_n]/v_k^2 - \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} v_i v_k \Rightarrow c_1(\xi) = c_1(\xi_{n-1}) \Rightarrow B_n$ изоморфно X_n. $\square$

Пример 1. *Рассмотрим нашу задачу для башен высоты 2(поверхность Хирцебруха):*
1. $\xi-$ одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^1$; η - тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^1$ - является образующей группы $Pic(\mathbb{C}P^1) \Rightarrow \xi = \eta^k$ для некоторого целого $k \Rightarrow B_2 = \mathbb{C}P(\eta^k \oplus \underline{\mathbb{C}})$. Поверхность Хирцебруха, определяемую целым числом k, будем обозначать $\mathcal{H}_k$.
2. Пусть $H^*(\mathcal{H}_k) \overset{\phi}{\cong} H^*(\mathcal{H}_m)$.
Из Теоремы 1 следует, что $H^*(\mathcal{H}_k) = \mathbb{Z}[x, u]/x^2, u^2 - kxu$, $H^*(\mathcal{H}_m) = \mathbb{Z}[x, v]/x^2, v^2 - mxv$.
Пусть $\phi(x) = ax + bv \Rightarrow 0 = \phi^2(x) = b(2a + bm)xu$.
Матрица замены базиса $\Phi = \begin{pmatrix} a & p \\ b & q \end{pmatrix}$
1.$b = 0$:
Т.к. ϕ - изоморфизм, то $det\Phi = \pm 1 \Rightarrow a, q = \pm 1$
$\phi(u)^2 = \pm kx(px \pm v) = \pm kxv = (\pm 2p + m)xv \Rightarrow k \equiv m (mod 2)$
2.$b \neq 0 \Rightarrow bm = -2a$:

$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} q & -p \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \phi^{-1}(x) = qx - bu$
$\phi^{-1}(x)^2 = 0 = b(bk - 2q) \Rightarrow bk = 2q.$
Пусть b - четное; $aq - bp = \pm 1$, тогда a, q - нечетные $\Rightarrow$
k, m - нечетные.
Пусть b - нечетное $\Rightarrow k, m$ - четные.
Таким образом во всех случаях: $k \equiv m(mod 2)$.
3. $k \equiv m(mod 2) \Rightarrow k - m = 2l$.
Далее нам понадобится следующее важное утверждение:

Лемма 1. *Пусть ξ - некоторое комплексное векторное расслоение, η - 1-векторное расслоение. Тогда $\mathbb{C}P(\xi)$ диффеоморфно $\mathbb{C}P(\xi \otimes \eta)$.*

Пользуясь леммой выше получаем:
$\mathbb{C}P(\eta^m \oplus \underline{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}P((\eta^m \oplus \underline{\mathbb{C}}) \otimes \eta^l) = \mathbb{C}P(\eta^{m+l} \oplus \eta^l).$
$c(\eta^{m+l} \oplus \eta^l) = (1 + (m+l)x)(1 + lx) = 1 + kx = c(\eta^m \oplus \underline{\mathbb{C}}).$
Но над $\mathbb{C}P^1$ первый класс Чженя является полным инвариантом(т.к. $\widetilde{K}(\mathbb{C}P^1) \cong H^2(\mathbb{C}P^1)$), значит $\mathbb{C}P(\eta^m \oplus \underline{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}P(\eta^k \oplus \underline{\mathbb{C}}) \Rightarrow \mathcal{H}_k \cong \mathcal{H}_m$.

3 Тривиальные башни

Сформулируем задачу для тривиальных башен Ботта:

Теорема 3 ([1])**.** *Пусть $H^*((\mathbb{C}P^1)^n) \cong H^*(B_n)$, тогда $(\mathbb{C}P^1)^n$ диффеоморфно B_n.*

Доказательство. 1.Из Теоремы 1 получаем, что

$$H^2(B_n) = \{x + bu_n | x \in H^2(B_{n-1}), b \in \mathbb{Z}\}.$$

$(x + bu_n)^2 = x^2 + 2bxu_n + b^2{u_n}^2 = x^2 + b(2x + bc_1(\xi_{n-1}))u_n$. Тогда при $b \neq 0$ квадрат $x + bu_n$ равен 0 в $H^*(B_n) \Leftrightarrow x^2 = 0, 2x + bc_1(\xi_{n-1}) = 0$.
При четном $c_1(\xi_{n-1})$, т.е. $a_{i,n}, i = 1, \ldots, n-1$ - четные:

$$x = -\frac{bc_1(\xi_{n-1})}{2} \Rightarrow x + bu_n = b(u_n - \frac{c_1(\xi_{n-1})}{2}).$$

При нечетном $c_1(\xi_{n-1})$, т.е. среди $a_{i,n}, i = 1, \ldots, n-1$ есть нечетные:

$$b = 2a \Rightarrow x = ac_1(\xi_{n-1}) \Rightarrow x + bu_n = a(2u_n - c_1(\xi_{n-1})).$$

В обоих случаях получаем, что $\{x + bu_n \in H^2(B_n) | b \neq 0, (x + bu_n)^2 = 0\}$ - свободная подгруппа ранга 1.
2. Покажем, что из $H^*((\mathbb{C}P^1)^n) \cong H^*(B_n)$ следует $H^*((\mathbb{C}P^1)^{n-1}) \cong H^*(B_{n-1})$.
$H^*((\mathbb{C}P^1)^n) \cong H^*(B_n) \Rightarrow$ в $H^*(B_n)$ есть два базиса:
$\{u_1, \ldots, u_n\}$ (этот берется согласно Теореме 1) и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ т.ч. $x_i \in H^2(B_n)$ и $x_i^2 = 0$.
Т.к. матрица перехода от одного базиса к другому невырождена, есть элемент (пусть его номер n), не лежащий в $H^2(B_{n-1})$. Мы можем заменить его на элемент, порождающий подгруппу, описанную в пункте 1. Тогда остальные элементы $x_i, i = 1, \ldots, n-1$ лежат в $H^2(B_{n-1})$, а $x_n = u_n + \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i x_i$ (коэффициент при u_n равен 1, т.к. определитель матрицы замены базиса ± 1).
Понятно, что тогда x_i, i = 1,..., n-1 - является базисом в $H^*(B_{n-1})$, при этом $x_i^2 = 0 \Rightarrow H^*((\mathbb{C}P^1)^{n-1}) \cong H^*(B_{n-1})$.
3. Таким образом по индукции можем считать, что $B_{n-1} \cong (\mathbb{C}P^1)^{n-1}$.

$$c_1(\xi_{n-1}) \in H^*(B_{n-1}) \Rightarrow c_1(\xi_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i.$$

$$0 = x_n^2 = (u_n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i)^2 = u_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i u_n + (\sum_{i=1}^{n-1} b_i x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(a_i + 2b_i)x_i u_n + 2\sum_{i<j} b_i b_j x_i x_j.$$

Из того, что $x_i x_j$ и $x_i u_n$ являются базисными элементами в $H^4(B_n)$ следует, что максимум один элемент $b_i \neq 0 \Rightarrow c_1(\xi_{n-1}) = -2b_i x_i$.
4. Пусть γ^{-2bi}– расслоение над $\mathbb{C}P^1$ с $c_1(\gamma^{-2bi}) = -2b_i u$. Тогда ξ_{n-1} индуцировано из γ^{-2bi} отображением проекции $(\mathbb{C}P^1)^{n-1} \to \mathbb{C}P^1$. Из соображений, описанных в примере, следует, что $\mathbb{C}P(\gamma^{-2b_i} \oplus \underline{C})$ - тривиальное расслоение над $\mathbb{C}P^1$, а значит $B_n \cong (\mathbb{C}P^1)^n$. □

4 Башни Ботта с одной подкруткой

В этом разделе рассмотрим задачу для башен, у которых все расслоения, кроме одного тривиальны. В таком случае башня однозначно определяется первым классом Чженя нетривиального расслоеиня.
Сначала рассмотрим случай подкрутки на последней ступени. Пусть у нас есть две такие башни: $B_\alpha = \mathbb{C}P(\xi_\alpha \oplus \underline{C})$ и $B_\beta = \mathbb{C}P(\xi_\beta \oplus \underline{C})$, причем
$c_1(\xi_\alpha) = \alpha$, $c_1(\xi_\beta) = \beta$, где $\alpha, \beta \in H^2((\mathbb{C}P^1)^{n-1})$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 4 ([2])**.** *Из изморфизма $\phi : H^*(B_\alpha) \to H^*(B_\beta)$ следует диффеоморфизм B_α и B_β.*

Прежде чем мы приступим к доказательству этой теоремы, докажем следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть ξ_α, ξ_β - одномерные расслоения над $(\mathbb{C}P^1)^n$ с первыми классами Чженя α, β соответственно. Пусть также $c_2(\xi_\alpha \oplus \xi_\beta) = 0$. Тогда*

$$\xi_\alpha \oplus \xi_\beta \cong \xi_\alpha \otimes \xi_\beta \oplus \underline{C}$$

.

Доказательство. $H^*((\mathbb{C}P^1)^n) = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]/x_i^2$
Пусть $\alpha = \alpha_i x_i, \;\; \beta = \beta_i x_i$
Из формулы Уитни:

$$c(\xi_\alpha \oplus \xi_\beta) = c(\xi_\alpha)c(\xi_\beta) = (1 + \alpha_i x_i)(1 + \beta_j x_j) = 1 + (\alpha_i + \beta_i)x_i + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i)x_i x_j.$$

Тогда $c_2(\xi_\alpha \oplus \xi_\beta) = \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i = 0$.
Пусть ровно k элементов в $\alpha = \alpha_i x_i$ не нулевые (для простоты будем считать, что это первые k элементов). При $k \geq 3$:
$\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 = 0, \; \alpha_1 \beta_3 + \beta_1 \alpha_3 = 0, \; \alpha_3 \beta_2 + \beta_3 \alpha_2 = 0.$
Тогда

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2}, \; \beta_2 = -\frac{\alpha_2 \beta_3}{\alpha_3}, \; \beta_3 = -\frac{\alpha_3 \beta_1}{\alpha_1} \Rightarrow \; \beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\beta_1 = -\beta_1 \; \Rightarrow \; \beta_1 = 0.$$

Ясно, что при $j > k : \;\; \beta_j = 0$.
При $j \leq k$:

$$\beta_j = -\frac{\alpha_j \beta_i}{\alpha_i}, \; i \neq j,$$

при i = 1 получаем, что $\beta_j = 0$. То есть $\beta = 0$. Тогда $\xi_\beta = \underline{C}$ и утверждение леммы становится очевидным.

При k = 1:
$\alpha_1\beta_i = 0,\ i > 1 \Rightarrow \beta_1 \neq 0$ (или $\beta = 0$, тогда возвращаемся в 1 случай). Т.е. $\alpha = \alpha_1 x_1$, $\beta = \beta_1 x_1 \Rightarrow$ расслоения $\xi_\alpha \oplus \xi_\beta$ и $\underline{C} \oplus \xi_\alpha \otimes \xi_\beta$ индуцированы из изоморфных расслоений над $\mathbb{C}P^1$, значит они изоморфны.
При k = 2:
$\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 = 0 \Rightarrow \beta_{1,2} \neq 0$ (или $\beta = 0$, тогда возвращаемся в 1 случай).
Тогда $\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ и $\beta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$. Значит ξ_α и ξ_β индуцированы из одномерных расслоений γ_α и γ_β над $(\mathbb{C}P^1)^2$ с первыми классами Чженя α и β соответственно. Таким образом, доказав, что $\gamma_\alpha \oplus \gamma_\beta$ и $\underline{C} \oplus \gamma_\alpha \otimes \gamma_\beta$ изоморфны при $\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 = 0$, мы завершим доказательство леммы.
Пусть НОД(α_1, α_2) = a > 0. Тогда $\alpha_1 = a\alpha'_1$ и $\alpha_2 = a\alpha'_2$ и $\alpha'_1\beta_2 + \beta_1\alpha'_2 = 0$. И пусть $\alpha' = \alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2 \ \Rightarrow\ \alpha = a\alpha'$.
1. Покажем, что если $\gamma_{\alpha'} \oplus \gamma_\beta \cong \underline{C} \oplus \gamma_{\alpha'} \otimes \gamma_\beta$, то $\gamma_{a\alpha'} \oplus \gamma_\beta \cong \underline{C} \oplus \gamma_{a\alpha'} \otimes \gamma_\beta$.
Для этого достаточно показать, что $\underline{C}$ содержится в $\gamma_{a\alpha'} \oplus \gamma_\beta$ в качестве подрасслоения. Действительно, в этом случае существует 1-расслоение η, т.ч. $\eta \oplus \underline{C} \cong \gamma_{a\alpha'} \oplus \gamma_\beta$. Отсюда видно, что $c_1(\eta) = a\alpha' + \beta \Rightarrow \eta \cong \gamma_{a\alpha'} \otimes \gamma_\beta$.
Построим не нулевое сечение расслоения $\gamma_{a\alpha'} \oplus \gamma_\beta$(Существование ненулевого сечения эквивалентно тому, что тривиальное расслоение является подрасслоением):
$\gamma_{\alpha'} \oplus \gamma_\beta$ содержит тривиальное подрасслоение. Тогда существует не нулевое сечение s расслоения $\gamma_{\alpha'} \oplus \gamma_\beta$. Определим сечения $s_{\alpha'}$ и s_β расслоений $\gamma_{\alpha'}$ и γ_β, соответственно.

$$s_{\alpha'} = p_{\alpha'} \circ s, \quad s_\beta = p_\beta \circ s,$$

где $p_{\alpha'}$ - проекция на $F(\gamma_{\alpha'})$, p_β - проекция на $F(\gamma_\beta)$.
Из того, что $s = (s_{\alpha'}, s_\beta)$ - не нулевое сечение, следует, что $s_{\alpha'}$ и s_β - сечения с пустым пересечением нулей.
Определим сечение $s_\alpha : b \to (s_{\alpha'}(b))^{\otimes a}$ расслоения γ_α ($\alpha = a\alpha'$). Множества нулей сечений s_α и $s_{\alpha'}$ совпадает. Тогда пара (s_α, s_β) - ненулевое сечение $\gamma_{a\alpha'} \oplus \gamma_\beta \Rightarrow \underline{C}$ - подрасслоение $\gamma_{a\alpha'} \oplus \gamma_\beta$.
2. Теперь покажем, что $\gamma_{\alpha'} \oplus \gamma_\beta \cong \underline{C} \oplus \gamma_{\alpha'} \otimes \gamma_\beta$ при $\alpha'_1\beta_2 + \alpha'_2\beta_1 = 0$ и $(\alpha'_1, \alpha'_2) = 1$.
$(\alpha'_1, \alpha'_2) = 1$ и $\beta_2 = -\frac{\beta_1\alpha'_2}{\alpha'_1} \Rightarrow \frac{\beta_1}{\alpha'_1} = m$ - целое.
$\beta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \beta_1 x_1 - \frac{\beta_1\alpha'_2}{\alpha'_1} x_2 = m(\alpha'_1 x_1 - \alpha'_2 x_2) := m\eta.$
$\gamma_{\alpha'} \oplus \gamma_\eta = \gamma_{\alpha'_1 x_1 + \alpha'_2 x_2} \oplus \gamma_{\alpha'_1 x_1 - \alpha'_2 x_2} \cong \gamma_{\alpha'_1 x_1} \otimes (\gamma_{\alpha'_2 x_2} \oplus \gamma_{-\alpha'_2 x_2})$.
Т.к. $\gamma_{\alpha'_1 x_1}$, $\gamma_{\alpha'_2 x_2}$ и $\gamma_{-\alpha'_2 x_2}$ индуцированы из расслоений над $\mathbb{C}P^1$, для которых утверждение верно, получаем:
$\gamma_{\alpha'_1 x_1} \otimes (\gamma_{\alpha'_2 x_2} \oplus \gamma_{-\alpha'_2 x_2}) \cong \gamma_{\alpha'_1 x_1} \otimes (\underline{C} \oplus \underline{C}) \cong \gamma_{\alpha'_1 x_1} \oplus \gamma_{\alpha'_1 x_1} \cong \underline{C} \oplus \gamma_{2\alpha'_1 x_1} = \underline{C} \oplus \gamma_{\alpha'+\eta}$.
В итоге получаем изоморфизм $\gamma_{\alpha'} \oplus \gamma_\eta$ и $\underline{C} \oplus \gamma_{\alpha'+\eta}$.
Тогда (из 1 пункта) $\gamma_{\alpha'} \oplus \gamma_{m\eta} \cong \underline{C} + \gamma_{\alpha'+m\eta} = \underline{C} + \gamma_{\alpha'+\beta} \Rightarrow$ (из 1 пункта)

$$\gamma_{a\alpha'} \oplus \gamma_\beta \cong \underline{C} \oplus \gamma_{a\alpha'+\beta}$$

. $\square$

Перейдем к доказательству самой теоремы.

Доказательство.

$$H^*(B_\alpha) \cong \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{n-1}, u]/x_i^2, u^2 - \alpha u,$$
$$H^*(B_\beta) \cong \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{n-1}, v]/x_i^2, v^2 - \beta v.$$

$\phi(x_i)^2 = 0 \in H^*(B_\beta) \Rightarrow$ (см.п1 в док-ве теоремы 3) либо все $\phi(x_i) \in H^*((\mathbb{C}P^1)^{n-1})$, либо один из них перейдет в $v + \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i x_i$ (или в $2v + \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i x_i$). Не трудно убедиться (также, как и в пунтке 3 док-ва теоремы 3), что тогда в последнем случае $\beta = c_i x_i$ для некоторого i. Значит $B_\beta \cong \mathcal{H} \times (\mathbb{C}P^1)^{n-2}$, где $\mathcal{H}$- поврехность Хирцебруха.

Обратим внимание на отображение ϕ^{-1}. Оно не может переводить $H^*((\mathbb{C}P^1)^{n-1})$ в себя, а значит $B_\alpha \cong \mathcal{H} \times (\mathbb{C}P^1)^{n-2}$. В зависимости от четности β, B_β либо тривиальна, либо нет. Из теоремы 3 следует, что B_α - тривиальна тогда и только тогда, когда B_β - тривиальна. Значит они диффеоморфны.
Т.о. можно считать, что изоморфизм ϕ, ограниченный на $H^*((\mathbb{C}P^1)^{n-1})$ является автоморфизмом.

$$\phi(x_i) = \sum_{k=1}^{n-1} b_i x_i, 0 = \phi(x_i)^2 = (\sum_{k=1}^{n-1} b_i x_i)^2 = 2\sum_{i<j} b_i b_j x_i x_j.$$

$x_i x_j$ - элементы базиса в $H^4(B_{n-1}) \Rightarrow$ только один элемент $b_i \neq 0$.
И из того, что $\det\Phi = \pm 1$ (Φ - матрица отображения) $\Rightarrow \phi(x_i) = \pm x_j$.
Т.о. можем считать, что ϕ - тождественно на $H^*(B_{n-1})$. Тогда $\alpha = \phi(\alpha)$.
Пусть $\phi(u) = v + \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i x_i = v + w$. Тогда

$$\phi(u)^2 = \alpha(v+w) = v^2 + 2vw + w^2 = (\beta + 2w)v + w^2 = \alpha v + \alpha w \Rightarrow \alpha = \beta + 2w, w^2 = \alpha w.$$

Из леммы 1 следует, что $\mathbb{C}P(\underline{C} \oplus \xi_\alpha) \cong \mathbb{C}P((\underline{C} \oplus \xi_\alpha) \otimes \xi_{-w}) = \mathbb{C}P(\xi_{-w} \oplus \xi_{\alpha-w})$, где ξ_{-w} - расслоение с первым классом Чженя $-w$.
$c(\xi_{-w} \oplus (\xi_{-w} \otimes \xi_\alpha)) = (1-w)(1-w+\alpha) = 1 + \beta + w^2 - w\alpha = 1 + \beta = c(\underline{C} \oplus \xi_\beta)$. Из леммы 2 следует:

$$\mathbb{C}P(\underline{C} \oplus \xi_\alpha) \cong \mathbb{C}P(\underline{C} \oplus \xi_\beta).$$

$\square$

Пусть теперь $M(\alpha, k)$ - башня Ботта вида:
$B_n \xrightarrow{p_n} \ldots \xrightarrow{p_{k+1}} B_k \xrightarrow{p_k} (\mathbb{C}P^1)^{k-1} \xrightarrow{p_{k-1}} \ldots \xrightarrow{p_2} \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{p_1} pt$, где все расслония $p_i, i \neq k$ - тривиальны, $B_k = \mathbb{C}P(\underline{C} \oplus \xi_{k-1})$, $c_1(\xi_{k-1}) = \alpha$.

Лемма 3. $M(\alpha, k) \cong M(\alpha, m)$.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать утверждение при (k, m) = (n, n - 1).

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}(\alpha, n) & & \mathrm{B}_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{CP}^1)^{n-1} & & \mathrm{M}(\alpha, n-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{CP}^1)^{n-2} & & (\mathrm{CP}^1)^{n-2} \end{array}$$

$\alpha = a_1 x_1 + \ldots a_{n-2} x_{n-2} \;\Rightarrow M(\alpha, n) \cong M(\alpha, n-1) \times \mathbb{C}P^1$, а т.к. p_n - тривиально $B_n \cong M(\alpha, n-1) \times \mathbb{C}P^1 \;\Rightarrow B_n \cong M(\alpha, n)$. $\square$

Из леммы 3 и теоремы 4 следует, что если $H^*(M(\alpha, k)) \cong H^*(M(\beta, m))$, то $M(\alpha, k)$ и $M(\beta, m)$ диффеоморфны.

Список литературы:

[1] V. Buchstaber, T. Panov. Toric topology. Math. Surv. and Monogr., 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] S. Choi and D. Y. Suh, Properties of Bott manifolds and cohomological rigidity, Algeb. Geom. Topol. 11(2) (2011), 1053–1076.