Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Многогранники моментов многообразия частичных флагов и обобщённые пермутоэдры

Выполнила:
студентка 403 группы
Максименко Дарья Глебовна

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2025

1 Введение

Многогранники моментов, возникающие при гамильтоновом действии тора на симплектических многообразиях, представляют собой важный объект исследования на стыке симплектической геометрии и комбинаторики. В классическом случае полного флагового многообразия образ отображения моментов, согласно теореме Атьи ([3]), совпадает с пермутоэдром, что даёт наглядное комбинаторное описание этой структуры . Однако при переходе к многообразиям частичных флагов прямое применение аналогичных приёмов сталкивается с техническими сложностями, связанными с описанием неподвижных точек и вершин образа отображения моментов.

В своей курсовой работе я ставлю цель установить точную связь между образом отображения моментов многообразий частичных флагов и обобщёнными пермутоэдрами. Основными результатами являются доказательство равенства классического пермутоэдра и его обобщённого варианта сумме Минковского гиперсимплексов, а также утверждение о том, что образ отображения моментов многообразия частичных флагов совпадает с соответствующим обобщённым пермутоэдром. Для достижения этих целей работа опирается на аппарат опорных функций, что позволяет унифицировать доказательства для полных и частичных флагов и существенно упростить рассуждения.

2 Необходимые определения

Определение 2.1. *Пусть задан набор целых чисел $1 \leq k_1 < ... < k_s \leq n-1$. Флагом типа $(k_1, ..., k_s)$ в $\mathbb{C}^n$ называется цепочка $U_1 \subset ...U_s$ подпространств пространствав $\mathbb{C}^n$, такая, что $dimU_i = k_i$. Совокупность флагов естественно топологизируется и превращается в многообразие флагов $Fl(n; k_1, ..., k_s)$.*

$Fl(n; 1, ..., n-1)$ называется многообразием полных флагов.

Определение 2.2. *Симплектическое многообразие - это пара (W, ω), где W - гладкое многообразие и ω - замкнутая дифференциальная 2-форма, невырожденная в каждой точке. Размерность симплектического многообразия W всегда четная.*

Определение 2.3. *Стандартный тор -*

$\mathbb{T}^n = \{\boldsymbol{t} = (t_1, ...t_n) \in \mathbb{C}^n : |t_i| = 1 \ for \ i = 1, ..., n\}$

Действие тора описывается следующим образом:

$\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $(t_1, ..., t_n) \cdot (z_1, ...z_n) = (t_1 z_1, ...t_n z_n)$

Определение 2.4. *Пусть тор $\mathbb{T}$ действует на W, сохраняя симплектическую форму ω. Обозначим алгебру Ли тора $\mathbb{T}$ через τ (т.к. тор коммутативен, то алгебра Ли тривиальна). Для каждого $v \in \tau$ обозначим через X_v соответствующее T-инвариантное векторное поле в W. Действие тора называется гамильтоновым, если 1-форма $\omega(X_v, \cdot)$ точная для любого $v \in \tau$. Другими словами, действие гамильтоново, если для каждого*

$v \in \tau$ существует функция H_v на W (гамильтонианы), удовлетворяющие условию:

$$\omega(X_v, Y) = dH_v(Y)$$

для любого векторного поля Y на W. Функции H_v определены с точностью до константы. Выберем базис $\{e_i\}$ в τ и соответствующие Гамильтонианы $\{H_{e_i}\}$. Тогда определено отображение моментов

$$\mu : W \to \tau^*,\ (x, e_i) \mapsto H_{e_i}(x),$$

где $x \in W$.

Ключевой результат, который позволяет нам однозначно сделать выводы об образе отображения моментов описан в [3]:

Теорема 2.1. *Пусть M - компактное связное симплектическое многообразие и пусть $f_1, ..., f_n$ - вещественнозначные функции, которые коммутируют по Пуассону и Гамильтоновы векторные поля которых порождают действие тора. Тогда отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$, заданная функциями f_i, удовлетворяет следующим условиям:*

- *все (не пустые) $f^{-1}(c)$ связные ($c \in \mathbb{R}^n$);*
- *образ $f(M)$ выпуклый*

Более того, если $Z_1, ...Z_N$ – связные компоненты множества $Z \subset M$ общих критических точек f_i, то $f(Z_j) = c_j$ - одна точка, и $f(M)$ - выпуклая оболочка точек $c_1, ..., c_N$.

Если все f_i имеют гамильтоновы поля, порождающие круговое действие таким образом, что мы имеем симплектическое действие тора $\mathbb{T}^n$ на M. Такое отображение f называется отображением моментов.

Определение 2.5. *Пермутоэдр – выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, заданный как:*

$$P_n = conv\{(\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n-1)) \mid \sigma \in S_n\}$$

- *Координаты вектора $(0, 1, \ldots, n-1)$ переставлены всеми способами*
- *Размерность: $n - 1$*

Определение 2.6. *Гиперсимплексом называется выпуклая оболочка:*

$$\Delta_n^k = conv\{x \in \{0,1\}^n \mid \sum x_i = k\}$$

Пример 2.1. *При $k = 1$ получаем стандартный симплекс*

Определение 2.7. *Опорная функция для выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^n$:*

$$s_K(u) = \sup_{x \in K}(u, x),$$

где $(,)$ - скалярное произведение.

Свойство 2.7.1. *Замкнутое выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ полностью определяется своей опорной функцией, так как оно может быть задано как множество решений системы неравенств*

$$X = \bigcap_{\substack{g \in \mathbb{R}^n \\ \|g\| \neq 0}} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, g) \leq s_X(g)\}.$$

Свойство 2.7.2. *Пусть $X_i, i \in I = \{1, \ldots, m\}$, – непустые компактные выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда, если $X = \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i=1}^m X_i\right)$, то*

$$s_X(g) = \max_{i \in I} s_{X_i}(g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

3 Свойства пермутоэдра

Теорема 3.2. *Пермутоэдр P_n равен сумме Минковского гиперсимплексов $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_n^k$*

Доказательство. Докажем, что $P_n \subset \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta_n^k$.

Возьмём произвольную вершину пермутоэдра $\sigma = (\sigma(), \ldots, \sigma(n-1))$.

Для каждого $k = 1, \ldots, n-1$ определим вектор $u_k \in \{0, 1\}^n$ по правилу

$$u_k(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(i) \geq n - k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда сумма координат u_k равна

$$\sum_{i=1}^{n} u_k(i) = \left|\{\, i \mid \sigma(i) \geq n - k\}\right| = k,$$

то есть $u_k \in \Delta_n^k$.

Теперь проверим, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k \;=\; \sigma.$$

Для каждой координаты i получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k(i) = \left|\{\, k \mid 1 \leq k \leq n-1,\ \sigma(i) \geq n - k\}\right| = \left|\{\, k \mid k \geq n - \sigma(i)\}\right| = \sigma(i).$$

Таким образом, $\sigma = u_1 + \cdots + u_{n-1}$ и, следовательно,

$$\sigma \in \Delta_n^1 + \Delta_n^2 + \cdots + \Delta_n^{n-1}.$$

Поскольку сумма Минковского выпуклых множеств выпукла и содержит все вершины P_n, получаем

$$P_n \subset \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_n^k.$$

Докажем теперь обратное включение:

Воспользуемся аппаратом опорных функций. Зафиксируем вектор $u \in \mathbb{R}^n$ Пусть всего его компоненты различны: $u_{p_1} > u_{p_2} > \cdots > u_{p_n}$.

Мы знаем, что $Q = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \Delta_n^k$ выпуклый (сумма Минковского выпуклых множеств выпукла). Значит, он может быть представлен, как выпуклая оболочка некоторого набора вершин $w_i, i \in I$. По свойству опорных функций:

$$s_Q(u) = \max_{i \in I} s_{w_i}(u)$$

Разложим вершину w, в которой достигается максимум, в сумму: $w = e^{(1)} + \cdots e^{(n-1)}$.

Тогда $s_w(u) = s_{e^{(1)}+\cdots e^{(n-1)}}(u) = (u, e^{(1)}) + \cdots + (u, e^{(n-1)})$. Осталось найти набор векторов $\{x^{(j)}\}$, в котором этот максимум достигается.

Координаты таких векторов имеют вид:

$$e_i^{(j)} = \begin{cases} 1 & \text{если } i \in \{p_1, ..., p_j\}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, вектор w_i имеет следующий вид:

на месте $p_1 : 1 + ..(n-1 \text{ раз}).. + 1 = n - 1$

На месте $p_2 : n - 2$

...

на месте $p_n : 0$,

и является вершиной пермутоэдра.

Теперь рассмотрим вектор $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где элементы упорядочены по неубыванию:

$$u_{p_1} \leq u_{p_2} \leq \cdots \leq u_{p_n}.$$

Предположим, что среди компонент u имеется ровно $s \leq n$ **различных значений**, которые обозначим как $u^1 > u^2 > \cdots > u^s$. Тогда вектор u можно представить в виде:

$$u = \Big(\underbrace{u^1, \ldots, u^1}_{K_1}, \underbrace{u^2, \ldots, u^2}_{K_2}, \ldots, \underbrace{u^s, \ldots, u^s}_{K_s} \Big),$$

где K_m — множество индексов p_j, для которых $u_{p_j} = u^m$.

Таким образом, вершины определяются последовательным распределением чисел, начиная с наибольшего значения u^1, с уменьшением числа при переходе к меньшим значениям u^m. Векторы e^j формируются следующим образом:

- Для $e^{(1)}$:

$$e^{(1)} = \mathbf{e}_p, \quad \text{где } p \in K_1.$$

- Для $e^{(2)}$:

$$e^{(2)} = \mathbf{e}_{p_1} + \mathbf{e}_{p_2}, \quad \begin{cases} p_1, p_2 \in K_1, & \text{если } |K_1| \geq 2, \\ p_1 \in K_1,\ p_2 \in K_2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Для $e^{(j)}$

$$e^{(j)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{j} p_k \, \mathrm{I}\{p_k \in K_i\}$$

Вектор w_i имеет следующий вид:
на местах $p_k \in K_1$ стоят $n-1,\ n-2, \ldots, n-|K_1|$;
на местах $p_k \in K_2$ стоят $n-|K_1|-1, \ldots, n-|K_1|-|K_2|$;
$\ldots$
на местах
$p_k \in K_s$ стоят $n-(|K_1|+\cdots+|K_{s-1}|+1), \ldots, n-(|K_1|+\cdots+|K_s|)$.
Очевидно, что это также вершина пермутоэдра. □

Обобщим это утверждение. Для этого предъявим новое определение пермутоэдра (обобщенного пермутоэдра):

Определение 3.8. *Для вещественных параметров* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ пермутоэдром $\mathrm{Pe}(x_1, \ldots, x_n)$ *называется выпуклый многогранник в* $\mathbb{R}^n$, *определяемый как выпуклая оболочка всех векторов, полученных из* $(x_1, \ldots, x_n)$ *перестановкой координат:*

$$\mathrm{Pe}(x_1, \ldots, x_n) \cong \mathrm{conv}\left((x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in S_n \right),$$

где S_n *— симметрическая группа. Заметим, что* $\mathrm{Pe}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ *совпадает с гиперсимплексом* Δ_n^k*, где* k *— количество единиц*. Правильный пермутоэдр *задаётся как* $\mathrm{Pe}(n-1, n-2, \ldots, 0)$*; его размерность равна* $n-1$.

Докажем теорему, которая является обобщением предыдущей и более сильным результатом:

Теорема 3.3. *Существует следующее разложение в сумму Минковского:*

$$\mathrm{Pe}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2)\Delta_n^1 + (x_2 - x_3)\Delta_n^2 + \cdots + x_n \Delta_n^n.$$

Доказательство. Обозначим $Q = (x_1 - x_2)\Delta_n^1 + (x_2 - x_3)\Delta_n^2 + \cdots + x_n \Delta_n^n$.

- $\mathrm{Pe}(x_1, \ldots, x_n) \subset Q$: Покажем, что все вершины $\mathrm{Pe}(x_1, ..., x_n)$ содержатся в сумме. Вершина пермутоэдра: $x_1 e_{\sigma(1)} + \cdots x_n e_{\sigma(n)}$. Обозначим

$$S_i(x_1 \geq ... \geq x_i \geq ... \geq x_n) = \begin{cases} 1 & \text{на местах } \sigma(1), ..., \sigma(i) \\ 0 & \text{на остальных местах} \end{cases}$$

$$x_1 e_{\sigma(1)} + \cdots x_n e_{\sigma(n)} = (x_1 - x_2)S_1 + (x_2 - x_3)S_2 + x_n S_n$$

Заметим, что S_i не что иное, как вершины Δ_n^i.

- $Q \subset \mathrm{Pe}(x_1, \dots, x_n)$: Снова воспользуемся аппаратом опорных функций.

  Зафиксируем $u \in (\mathbb{R}^n)^*$, $u_{p_1} > u_{p_2} > \dots > u_{p_n}$. Аналогично, Q - выпуклый многогранник, значит есть набор вершин $w_i, i \in I$.

  $$s_Q(u) = \max_{i \in I}(u, w_i), \text{ где } w_i = (x_1 - x_2)e_i^{(1)} + \dots + x_n e_i^{(n)}$$

  Координаты вектора $e_i^{(j)}$ имеют вид:

  $$\begin{cases} 1 & \text{на местах } p_1, \dots, p_j \\ 0 & \text{на оставшихся} \end{cases}$$

  Тогда w_i имеет вид:

  на месте $p_1 : x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \dots + x_n = x_1$;

  на месте $p_2 : x_2 - x_3 + \dots + x_n = x_2$;

  на месте $p_n : x_n$.

  Повторим логику прошлого доказательства.

  Рассмотрим вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, где элементы упорядочены по неубыванию:

  $$u_{p_1} \leq u_{p_2} \leq \dots \leq u_{p_n}.$$

  Предположим, что среди компонент u имеется ровно $s \leq n$ **различных значений**, которые обозначим как $u^1 > u^2 > \dots > u^s$. Тогда вектор u можно представить в виде:

  $$u = \Bigg(\underbrace{u^1, \dots, u^1}_{K_1}, \underbrace{u^2, \dots, u^2}_{K_2}, \dots, \underbrace{u^s, \dots, u^s}_{K_s}\Bigg),$$

  где K_m — множество индексов p_j, для которых $u_{p_j} = u^m$.

  Таким образом, вершины определяются последовательным распределением чисел, начиная с наибольшего значения u^1, с уменьшением числа при переходе к меньшим значениям u^m. Вершины пермутоэдра, соответствующие максимуму опорной функции, формируются следующим образом:

  - Для $e^{(1)}$:

    $$e^{(1)} = \mathbf{e}_p, \quad \text{где } p \in K_1.$$

  - Для $e^{(2)}$:

    $$e^{(2)} = \mathbf{e}_{p_1} + \mathbf{e}_{p_2}, \quad \begin{cases} p_1, p_2 \in K_1, & \text{если } |K_1| \geq 2, \\ p_1 \in K_1,\, p_2 \in K_2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

– Для $e^{(j)}$

$$e^{(j)} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{j} p_k \, \mathrm{I}\{p_k \in K_i\}$$

Вектор w_i имеет следующий вид:

на местах $p_k \in K_1$ стоят $x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \cdots + x_n = x_1$, $x_2 - x_3 + \cdots + x_n = x_2, x_{|K_1|} - x_{|K_1|+1} + \cdots + x_n = x_{|K_1|}$;

на местах $p_k \in K_2$ аналогично стоят $x_{|K_1|+1}$ и т.д.

Также видим, что это вершина обобщённого пермутоэдра.

□

4 Связь с образом отображения моментов многообразия флагов

Следует подчеркнуть, что в случае полных флагов более естественным подходом представляется прямое применение теоремы Атьи([3]), утверждающей, что образ отображения моментов выпуклого компактного множества совпадает с выпуклой оболочкой образов его неподвижных точек. Данное обстоятельство позволяет существенно упростить задачу, поскольку в случае полных флагов существует возможность явного комбинаторного описания вершин результирующего многогранника (пермутоэдра). Однако в случае частичных флагов реализация аналогичной стратегии сталкивается со значительными техническими сложностями, связанными с описанием вершин. В курсовой прошлого года доказано, что образ отображения моментов многообразия полных (частичных) флагов лежит в сумме всех (некоторых) гиперсимплексов. Доказав следующие утверждения, мы покажем, что имеет место равенство.

Утверждение 4.4. *Пермутоэдр P_n лежит в $\mu(Fl(n))$.*

Доказательство. Достаточно показать,что каждая вершина пермутоэдра является образом какой-то точки многообразия флагов. Рассмотрим флаг, который является неподвижной точкой отображения моментов

$$U_1 \subset U_2 \subset \cdots U_{n-1},$$

где $U_1 = e_{i_1}$, $U_2 = conv(e_{i_1}, e_{i_2})$, ..., $U_{n-1} = conv(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{n-1}})$ $(i_1 \in [n]$, $i_2 \in [n]/i, ..., i_{n-1} \in [n]/\bigcup_{k=1}^{n-1} i_k)$ Из доказательства теоремы про вложенность образа многообразия флагов в сумму гиперсимплексов, мы знаем, что этот флаг отображается в вектор в $(\mathbb{R}^n)^*$ следующим образом:

$$e_{i_1} + (e_{i_1} + e_{i_2}) + \cdots + (e_{i_1} + \cdots e_{i_{n-1}}) =$$
$$(n-1)e_{i_1} + (n-2)e_{i_2} + ...1(e_{i_n - 1}) + 0(e_{i_n})$$

Мы получили вектор, в котором на i_1 месте стоит число n-1, i_2 месте – n-2 и т.д. Перебирая все образы неподвижных точек, получим в точности вершины пермутоэдра.

$\square$

Утверждение 4.5.

$$\mathrm{Pe}(\underbrace{s,\ldots,s}_{k_s},\ \underbrace{s-1,\ldots,s-1}_{k_{s-1}-k_s},\ \ldots,\ \underbrace{1,\ldots,1}_{k_1-k_2},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_0-k_1}) \subset \mu(Fl(k_1,\ldots,k_s)).$$

Доказательство. Достаточно показать, что каждая вершина пермутоэдра является образом какй-то точки многообразия флагов. Рассмотрим флаг, который является неподвижной точкой отображения моментов:

$$U_{k_s} \subset U_{k_{s-1}} \subset \cdots \subset U_{k_1},$$

где

$U_{k_s} = \langle e_{i_1},\ldots,e_{i_{k_s}}\rangle$
$U_{k_{s-1}} = \langle e_{i_1},\ldots,e_{i_{k_s}},\ldots,e_{i_{k_{s-1}}}\rangle$
$\cdots$
$U_{k_1} = \langle e_{i_1},\ldots,e_{i_{k_s}},\ldots,e_{i_{k_{s-1}}},\ldots,e_{i_{k_{s-2}}},\ldots,e_{i_{k_1}}\rangle$

Этот флаг отображается в вектор в $(\mathbb{R}^n)^*$ следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{k_s} e_{i_m} + \sum_{m=1}^{k_{s-1}} e_{i_m} + \cdots + \sum_{m=1}^{k_1} e_{i_m} =$$
$$s(\sum_{m=1}^{k_s} e_{i_m}) + (s-1)(\sum_{m=k_s+1}^{k_{s-1}} e_{i_m}) + \cdots + 1(\sum_{m=k_2+1}^{k_1} e_{i_m}) + 0(\sum_{m=k_1}^{n} e_{i_m}),$$

Что в точности является вершиной обобщенного пермутоэдра следующего вида:

$$\mathrm{Pe}(\underbrace{s,\ldots,s}_{k_s},\ \underbrace{s-1,\ldots,s-1}_{k_{s-1}-k_s},\ \ldots,\ \underbrace{1,\ldots,1}_{k_1-k_2},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_0-k_1})$$

$\square$

Таким образом, с помощью новых доказанных результатов, мы показали:

Теорема 4.6. *Образ отображения моментов многообразия флагов* ***равен*** *сумме Минковского всех или некоторых гиперсимплексов:*

$$\mu(Fl(n;k_1,...,k_s)) = \sum_{i=1}^{s} \Delta_n^{k_i}$$

Список литературы

[1] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015 (518 стр.).

[2] Mich‘ele Audin. The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Progress in Mathematics, 93. Birkh¨auser, Basel, 1991.

[3] Michael Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. Bull. London Math. Soc. 14 (1982), no. 1, 1–15.

[4] Г.М. Гроель, Вик. С. Куликов, О симплектических накрытиях проективной плоскости, Серия Математическая, том 69, № 4, 2005, стр 19-58.

[5] И. М. Гельфанд, В. В. Серганова, Страты максимального тора в компактном однородном пространстве, Докл. АН СССР, 1987, том 292, номер 3, 524–528.

[6] Alexander Postnikov. *Permutohedra, associahedra, and beyond*. arXiv preprint math/0507163, 2005. `https://arxiv.org/abs/math/0507163`

[7] Л. Н. Полякова. «Некоторые свойства опорной функции выпуклого множества на выпуклом конусе». Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления, № 3 (2012), 70–78. `http://mi.mathnet.ru/vspui83`