

Московский государственный университет имени М.В.  
Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

## Курсовая работа

Образ отображения моментов для действия тора на  
многообразии частичных флагов

Выполнила:  
студентка 303 группы  
Максименко Дарья Глебовна

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2024

## Содержание

Содержание	1
1 Введение	2
2 Основные определения	2
3 Образ отображения моментов для $\mathbb{C}^n$	4
4 Образ отображения моментов для $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$	7
5 Образ отображения моментов для $G(k, n)$	8
6 Образ отображения моментов для $Fl(\mathbb{C}^n)$ и для $Fl(n, k_1, \dots, k_s)$	9
Список литературы	11

# 1 Введение

Изучение моментов в теории многообразий является одной из ключевых тем в современной математике, особенно в контексте симплектической геометрии и алгебраической топологии. Образы отображения моментов играют важную роль в описании геометрических и топологических свойств различных многообразий. Цель данной курсовой работы заключается в нахождении образов отображения моментов для многообразий частичных и полных флагов.

В рамках работы будет проведен последовательный анализ нескольких важных многообразий:

1. **Образ отображения моментов для комплексного пространства  $\mathbb{C}^n$ .** Начнем с рассмотрения образа отображения моментов для самого простого случая — комплексного пространства  $\mathbb{C}^n$ , что позволит заложить основы для дальнейшего анализа более сложных структур.
2. **Образ отображения моментов для проективного пространства  $\mathbb{C}P^n$ .** Следующим шагом станет изучение проективного пространства  $\mathbb{C}P^n$ , где образ отображения моментов представляет собой важный инструмент для понимания его симплектической структуры.
3. **Образ отображения моментов для многообразия Грассмана  $G(k, n)$ .** Далее, внимание будет уделено многообразию Грассмана  $G(k, n)$ , которое обобщает концепции предыдущих примеров и является фундаментальным объектом в теории представлений и алгебраической геометрии.
4. **Сложение результатов и получение итогового результата.** Завершающим этапом работы станет интеграция полученных данных для определения общего образа отображения моментов для многообразий частичных и полных флагов.

Каждый из вышеперечисленных шагов является важной составляющей для достижения основной цели курсовой работы. Поэтапное рассмотрение и анализ позволит выстроить цельную картину и глубже понять взаимосвязи между различными типами многообразий.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за помощь, внимание и ценные советы. Также автор благодарит Дмитрия Цыганкова и Викторию Оганисян за ценные обсуждения.

# 2 Основные определения

В работе будут использоваться следующие определения.

**Определение 2.1.** Проективное пространство  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  - совокупность проходящих через 0 прямых пространства  $\mathbb{C}^{n+1}$ , топологизированная угловой метрикой: расстояние между двумя прямыми равно углу между ними.

**Определение 2.2.** Координаты  $[x_0 : \dots : x_n]$  направляющие вектора прямой (определенные, очевидно, с точностью до пропорциональности) называются однородными координатами точки проективного пространства.

**Определение 2.3.** Многообразия Грассмана - это обобщение проективных пространств. Комплексное многообразие Грассмана  $G(n, k)$  определяется, как пространство  $k$ -мерных подпространств пространства  $\mathbb{C}^n$ .

$$\begin{aligned} G(n, k) &= G(n, n - k) \\ G(n, 1) &= \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \end{aligned}$$

Подпространство  $\pi \subset \mathbb{C}^n$  размерности  $k$  задается  $k$ -поливектором  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k \mathbb{C}^n$  или (в координатах) классом эквивалентности  $[P]$  матрицы  $P$  размера  $k \times n$ .

**Определение 2.4. Координаты на многообразиях Грассмана.** Фиксируем в пространстве  $\alpha \in G(n, k)$  базис, запишем координаты базисных векторов (в пространстве  $\mathbb{C}^n$  в виде  $k \times n$ -матрицы и вычисляем все  $\binom{n}{k}$  миноров порядка  $k$ . Получающиеся числа не все равны 0 и при замене базиса в  $\alpha$  умножаются на одно и то же число. Такой набор из  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  чисел  $\{p_{i_1 \dots i_k}\}$  является координатами поливектора  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  в стандартном базисе  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}$  внешней степени  $\Lambda^k \mathbb{C}^n$  и называется координатами Плюккера  $k$ -мерной плоскости.

Отображение

$$\begin{aligned} G_k(\mathbb{C}^n) &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] &\mapsto [\dots : p_{i_1 \dots i_k} : \dots] \end{aligned}$$

является вложением гладкого подмногообразия, а его образ задается соотношениями

$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r p_{i_1 \dots i_{k-1} j_r} p_{j_1 \dots \hat{j}_r \dots j_{k+1}} = 0$$

**Определение 2.5.** Многообразие флагов - это обобщение многообразий Грассмана. Пусть задан набор целых чисел  $1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq n - 1$ . Флагом типа  $(k_1, \dots, k_s)$  в  $\mathbb{C}^n$  называется цепочка  $U_1 \subset \dots \subset U_s$  подпространств пространства  $\mathbb{C}^n$ , такая, что  $\dim U_i = k_i$ . Совокупность флагов естественно топологизуется и превращается в многообразие флагов  $Fl(n; k_1, \dots, k_s)$ .

$Fl(n; 1, \dots, n - 1)$  называется многообразием полных флагов.

**Определение 2.6.** Симплектическое многообразие - это пара  $(W, \omega)$ , где  $W$  - гладкое многообразие и  $\omega$  - замкнутая дифференциальная 2-форма, невырожденная в каждой точке. Размерность симплектического многообразия  $W$  всегда четная.

**Определение 2.7.** *Стандартный тор -*

$$\mathbb{T}^n = \{t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n : |t_i| = 1 \text{ for } i = 1, \dots, n\}$$

Действие тора описывается следующим образом:

$$\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, (t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$$

**Определение 2.8.** *Пусть тор  $\mathbb{T}$  действует на  $W$ , сохраняя симплектическую форму  $\omega$ . Обозначим алгебру Ли тора  $\mathbb{T}$  через  $\tau$  (т.к. тор коммутативен, то алгебра Ли тривиальна). Для каждого  $v \in \tau$  обозначим через  $X_v$  соответствующее  $T$ -инвариантное векторное поле в  $W$ . Действие тора называется гамильтоновым, если 1-форма  $\omega(X_v, \cdot)$  точная для любого  $v \in \tau$ . Другими словами, действие гамильтоново, если для каждого  $v \in \tau$  существует функция  $H_v$  на  $W$  (гамильтонианы), удовлетворяющие условию:*

$$\omega(X_v, Y) = dH_v(Y)$$

для любого векторного поля  $Y$  на  $W$ . Функции  $H_v$  определены с точностью до константы. Выберем базис  $\{e_i\}$  в  $\tau$  и соответствующие Гамильтонианы  $\{H_{e_i}\}$ . Тогда определено отображение моментов

$$\mu : W \rightarrow \tau^*, (x, e_i) \mapsto H_{e_i}(x),$$

где  $x \in W$ .

Ключевой результат, который позволяет нам однозначно сделать выводы об образе отображения моментов описан в [3]:

**Теорема 2.1.** *Пусть  $M$  - компактное связное симплектическое многообразие и пусть  $f_1, \dots, f_n$  -  $n$  действительнзначный функций, которые коммутируют по Пуассону и Гамильтоновы векторные поля которых порождают действие тора. Тогда отображение  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданная  $f_i$ , удовлетворяет следующим условиям:*

- все (не пустые)  $f^{-1}(c)$  связные ( $c \in \mathbb{R}^n$ );
- образ  $f(M)$  выпуклый

Более того, если  $Z_1, \dots, Z_N$  связных компонент множества  $Z \subset M$  общих критических точек  $f_i$ , то  $f(Z_j) = c_j$  - одна точка, и  $f(M)$  - выпуклая оболочка  $c_1, \dots, c_N$ .

Если все  $f_i$  имеют гамильтоновы поля, порождающие круговое действие таким образом, что мы имеем симплектическое действие тора  $\mathbb{T}^n$  на  $M$ . Такое отображение  $f$  называется отображением моментов.

### 3 Образ отображения моментов для $\mathbb{C}^n$

**Пример 3.1.** *Самый просто пример образа отображения моментов симплектического многообразия -  $W = \mathbb{C}^n$  с симплектической формой*

$$\omega = i \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k = 2 \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$$

где  $z_k = x_k + iy_k$ . Координатное действие тора  $\mathbb{T}^n$  на  $\mathbb{C}^n$  является гамильтоновым. Образом моментов  $\mu : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  является  $\mu(z_1, \dots, z_n) = (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$ . То есть образ отображения моментов  $\mu$  - это положительный ортант  $\mathbb{R}_{\geq}^n$ .

*Доказательство.* Компактный тор  $\mathbb{T}^n$  действует на  $\mathbb{C}^n$  по координатам. Действие тора является гамильтоновым, если существует функция  $H_v$  на  $W$ , такая что:

$$\omega(X_v, Y) = dH_v(Y)$$

для любого векторного поля  $Y$  на  $W$ . В данном случае  $v \in \mathfrak{t}$  - элемент алгебры Ли тора  $\mathbb{T}^n$ .

Выберем базис  $\{e_i\}$  в  $\mathfrak{t}$ , и соответствующие гамильтоновы функции  $\{H_i\}$ . Тогда моментное отображение определяется как:

$$\mu : W \rightarrow \mathfrak{t}^*, \quad (x, e_i) \mapsto H_i(x).$$

Рассмотрим элемент  $e_k$  базиса алгебры Ли  $\mathfrak{t}$  тора  $\mathbb{T}^n$ . Векторное поле  $X_{e_k}$ , порождаемое действием этого элемента, можно найти, дифференцируя действие тора по параметру  $\theta_k$ .

Для координаты  $z_j$  имеем:

- Если  $j \neq k$ , то  $z_j$  не меняется под действием  $e^{i\theta_k}$ , поэтому  $X_{e_k}(z_j) = 0$ .
- Если  $j = k$ , то:

$$z_k \mapsto e^{i\theta_k} z_k.$$

Дифференцируя по  $\theta_k$  при  $\theta_k = 0$ , получаем:

$$\left. \frac{d}{d\theta_k} \right|_{\theta_k=0} (e^{i\theta_k} z_k) = \left. \frac{d}{d\theta_k} \right|_{\theta_k=0} (z_k \cos(\theta_k) + iz_k \sin(\theta_k)) = iz_k.$$

Это означает, что действие  $e^{i\theta_k}$  на  $z_k$  генерирует векторное поле  $X_{e_k} = iz_k \frac{\partial}{\partial z_k}$ .

Для сопряжённой координаты  $\bar{z}_k$  действие тора  $\mathbb{T}^n$  таково:

$$\bar{z}_k \mapsto e^{-i\theta_k} \bar{z}_k.$$

Дифференцируя по  $\theta_k$  при  $\theta_k = 0$ , получаем:

$$\left. \frac{d}{d\theta_k} \right|_{\theta_k=0} (e^{-i\theta_k} \bar{z}_k) = \left. \frac{d}{d\theta_k} \right|_{\theta_k=0} (\bar{z}_k \cos(-\theta_k) + i\bar{z}_k \sin(-\theta_k)) = -i\bar{z}_k.$$

Это означает, что действие  $e^{i\theta_k}$  на  $\bar{z}_k$  генерирует векторное поле  $X_{e_k} = -i\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$ .

Таким образом, векторное поле  $X_{e_k}$ , соответствующее действию элемента  $e_k$  алгебры Ли тора  $\mathbb{T}^n$  на координате  $z_k$  многообразия  $\mathbb{C}^n$ , имеет вид:

$$X_{e_k} = iz_k \frac{\partial}{\partial z_k} - i\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}.$$

Теперь найдём соответствующую гамильтонову функцию  $H_k$  для векторного поля  $X_{e_k}$ , которая должна удовлетворять уравнению:

$$\omega(X_{e_k}, \cdot) = dH_k(\cdot).$$

Проверим, что  $H_k(z) = |z_k|^2$  является подходящей функцией. Вычислим внешнюю производную  $dH_k$ :

$$dH_k = d(|z_k|^2) = d(z_k \bar{z}_k) = z_k d\bar{z}_k + \bar{z}_k dz_k$$

Теперь проверим, что  $\omega(X_{e_k}, \cdot) = dH_k$ . Для этого возьмём произвольное векторное поле  $Y$  и вычислим  $\omega(X_{e_k}, Y)$ :

$$\omega(X_{e_k}, Y) = \omega\left(iz_k \frac{\partial}{\partial z_k} - i\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y\right)$$

Подставляя  $\omega = idz_k \wedge d\bar{z}_k$ :

$$\omega\left(iz_k \frac{\partial}{\partial z_k}, Y\right) = i \cdot iz_k \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial z_k}, Y\right) = -z_k \omega\left(\frac{\partial}{\partial z_k}, Y\right)$$

$$\omega\left(i\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y\right) = -i \cdot -i\bar{z}_k \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y\right) = \bar{z}_k \omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y\right).$$

Таким образом,

$$\omega(X_{e_k}, Y) = -z_k \omega\left(\frac{\partial}{\partial z_k}, Y\right) + \bar{z}_k \omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y\right).$$

С учётом определения  $\omega$ ,

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial z_k}, Y\right) = d\bar{z}_k(Y), \quad \omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y\right) = dz_k(Y),$$

поэтому

$$\omega(X_{e_k}, Y) = -z_k d\bar{z}_k(Y) + \bar{z}_k dz_k(Y) = (z_k d\bar{z}_k + \bar{z}_k dz_k)(Y) = dH_k(Y).$$

Так как  $|z_k|^2 \geq 0$  для каждого  $k$ , образ моментного отображения  $\mu$  является положительным ортантом в  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mu(\mathbb{C}^n) = \mathbb{R}_{\geq}^n.$$

□

## 4 Образ отображения моментов для $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

**Конструкция 4.1.** Дифференциальная форма Фубини-Штуди Рассмотрим комплексное проективное пространство  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  в комплексном векторном пространстве  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Снабдим его эрмитовым скалярным умножением:

$$\varkappa(v, w) = \gamma(v, w) + i \cdot \omega(v, w) \quad (v, w \in V),$$

где вещественная часть  $\gamma$  - это вещественное скалярное умножение (положительно определённая симметрическая билинейная форма), а мнимая часть  $\omega$  - кососкалярное умножения (невырожденная кососимметрическая билинейная форма). Они связаны друг с другом следующим образом:

$$\omega(v, w) = \gamma(v, Iw),$$

где  $I : V \rightarrow V$  - оператор умножения на  $i$ .

Проекция  $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  отображает вектор в точку  $x = \langle v \rangle$  проективного пространства (т.е. прямую в  $\mathbb{C}^{n+1}$ ). Её дифференциал  $d_v p : T_v \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow T_x \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  сюръективен, причем  $\text{Ker} d_v p = \langle v \rangle$ . Значит,

$$d_v p : \langle v \rangle^\perp \rightarrow T_x \mathbb{C}\mathbb{P}^n$$

- изоморфизм векторных пространств, с помощью которого можно перенести эрмитово скалярное умножение  $\varkappa$  на пространство  $T_x \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Полученное эрмитово скалярное умножение зависит от выбора вектора  $v \in p^{-1}(x)$ : если взять  $w = \lambda v$  ( $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ), то  $d_v p = d_w p \cdot \lambda$ , поэтому при замене  $v$  на  $w$  эрмитова форма умножается на  $|\lambda|^2$ . Чтобы это исправить, нужно нормировать вектор  $v$  условием  $\varkappa(v, v) = 1$ .

Его мнимая часть  $\omega_x$  определяет кососкалярное умножение на  $T_x \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , и таким образом на  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  возникает невырожденная внешняя 2-форма  $\omega$ , которая и называется формой Фубини-Штуди. В однородных координатах  $[z_1 : \dots : z_n : z_{n+1}] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  она выражается следующим образом:

$$\omega = \frac{i}{(\sum_{j=0}^{n+1} \bar{z}_j z_j)^2} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{j \neq k} (\bar{z}_j z_j dz_k \wedge d\bar{z}_k - \bar{z}_j z_k dz_j \wedge d\bar{z}_k)$$

**Утверждение 4.2.** образ отображения моментов для  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  Рассмотрим  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  с действием тора  $\mathbb{T}^{n+1}$ . с отображением моментов:

$$\mu([z_0 : \dots : z_n]) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n |z_i|^2} (|z_0|^2, \dots, |z_n|^2)$$

и  $\mu(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  - выпуклая оболочка базисных векторов  $e_0, \dots, e_n$ .

*Доказательство.* Это очевидно из построения симплектической формы для  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ . Также этот факт можно доказать по аналогии с предыдущим утверждением  $\square$

## 5 Образ отображения моментов для $G(k, n)$

**Утверждение 5.3.** *Образ отображения моментов для многообразия Грассмана  $\mu(G(k, n))$  - выпуклый многогранник в  $\mathbb{R}^n$ , заданный следующими ограничениями:*

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i = k \quad 0 \leq \xi_i \leq 1.$$

*Такой многогранник называется гиперсимплексом и обозначается  $\Delta_k^n$ .*

*Доказательство.* Напомним свойство вложения многообразия Грассмана:  
Отображение

$$\begin{aligned} G_k(\mathbb{C}^n) &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] &\mapsto [\dots : p_{i_1 \dots i_k} : \dots] \end{aligned}$$

является вложением гладкого подмногообразия. Если координаты в  $\mathbb{C}^n$  задаются, как набор из  $n$  комплексных чисел  $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ , то координаты в  $\Delta^k \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \langle e_1 \wedge \dots \wedge e_k, \dots, e_{n-k} \wedge \dots \wedge e_n \rangle = \langle w_{1\dots k}, \dots, w_{n-k\dots n} \rangle$  - координаты Плюккера с индексами, равными всеми перестановками по  $k$  чисел из множества  $\{1, \dots, n\}$ .

На многообразии Грассмана  $G_k(\mathbb{C}^n)$  действует тор размерности  $n$   $\mathbb{T}^n$ , а на  $\mathbb{C}\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$  - тор  $\mathbb{T}^{\binom{n}{k}}$ . Из вложения многообразия следует вложенность тора, которые порождает на него действие. Следует выяснить, как именно вложен тор  $\mathbb{T}^n$  в  $\mathbb{T}^{\binom{n}{k}}$ . Заметим, как действует тор на базисные вектора:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n \\ \bar{t}e_1 &= t_1 e_1; \\ \bar{t}e_k &= t_k e_k; \\ \bar{t}e_1 \wedge e_2 &= t_1 e_1 \wedge t_2 e_2 = t_1 t_2 (e_1 \wedge e_2); \\ \bar{t}e_1 \wedge \dots \wedge e_k &= t_1 t_2 \dots t_k (e_1 \wedge \dots \wedge e_k). \end{aligned}$$

Получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^n &\hookrightarrow \mathbb{T}^{\binom{n}{k}} \\ (t_1, t_2, \dots, t_n) &\mapsto (t_1 t_2 \dots t_k, \dots, t_{n-k} t_{n-k+1} \dots t_n) \end{aligned}$$

Заметим, что тор, вложенный таким образом, сохраняет уравнение многообразия Грассмана в проективном пространстве  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ . Матрица Якоби последнего отображения состоит из  $\binom{n}{k}$  по строк по  $n$  чисел, из которых  $k$  единиц и  $n-k$  нулей. В  $i$ -той строке матрицы единицы стоят на местах согласно  $i$ -й координате из последнего отображения. Для случая  $G(2, 4)$  матрица Якоби выглядит следующим образом:

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) \mapsto (t_1 t_2, t_1 t_3, t_1 t_4, t_2, t_3, t_2, t_4, t_3, t_4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

На двойственных алгебрах Ли есть обратное соотношение, т.е. проекция  $\tau^* = (\mathbb{R}^{\binom{n}{k}})^* \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ . Значит, выпуклая оболочка базисных векторов в образе моментов для проективного пространства с действием тора соответствующей размерности проецируется на образ отображения моментов с новым действием тора. Как выглядит этот образ легко понять, применив транспонированную матрицу Якоби:

$$\langle (e_1 \wedge \dots \wedge e_k)^*, \dots, (e_{n-k} \wedge \dots \wedge e_n)^* \rangle \mapsto \langle e_1^* + \dots + e_k^*, \dots, e_{n-k}^* + \dots + e_n^* \rangle$$

По определению, это гиперсимплекс  $\Delta_k^n$ , но это образ отображения моментов для  $\mu_{\mathbb{T}^n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1})$ . Для того, чтобы доказать, что этот образ отображения моментов совпадает с образом моментов для грассманиана, осталось понять, что это отображение сюръективно. Все неподвижные точки (базисные вектора) для этого действия уже лежат в  $G(k, n)$ , значит его образ отображения моментов совпадает с гиперсимплексом.  $\square$

## 6 Образ отображения моментов для $Fl(\mathbb{C}^n)$ и для $Fl(n, k_1, \dots, k_s)$

**Теорема 6.4.** *Образ отображения моментов для многообразия полных флагов  $Fl(\mathbb{C}^n)$  -  $n$ -мерный пермутэдр.*

*Доказательство.* Доказательство во многом повторяет схему доказательства вида образа отображения моментов для многообразия Грассмана. Существенная разница заключается в том, что теперь многообразие вложено в произведение грассманианов, которые в свою очередь, вложены в свои проективные пространства.

$$Fl(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow G(1, n) \times G(2, n) \times \dots \times G(n-1, n) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n) \dots \times \mathbb{P}(\Lambda^{n-1} \mathbb{C}^n)$$

На  $Fl(\mathbb{C}^n)$  действует тор  $\mathbb{T}^n$ . Он вложен в тор размерности  $2^n - 2$  и должен сохранять уравнения всех грассманианов, как гиперповерхностей, т.е.

$$\begin{aligned} G(1, n) &: (t_1, \dots, t_n)(w_1 : \dots : w_n) = (t_1 w_1 : \dots : t_n w_n), \\ G(2, n) &: (t_1, \dots, t_n)(w_{12} : \dots : w_{n-1n}) = (t_1 t_2 w_{12} : \dots : t_{n-1} t_n w_{n-1n}), \\ &\dots \\ G(k, n) &: (t_1, \dots, t_n)(w_{12\dots k} : \dots : w_{n-k\dots n}) = (t_1 \dots t_k w_{12\dots k} : \dots : t_{n-k} \dots t_n w_{n-k\dots n}), \end{aligned}$$

где  $k \in 1, \dots, n-1$  и  $w_{\dots}$  - плюккеровы координаты грассманиана. Якобиан отображения  $\mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{T}^{2^n-2}$  выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{c}
\text{n} \\
\left( \begin{array}{ccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{array} \right)
\end{array}
\begin{array}{l}
\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{условие для } G(1,n) \\
\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{условие для } G(2,n) \\
\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{условие для } G(n-1,n)
\end{array}$$

Для того, чтобы спроецировать образ отображения моментов эту матрицу также, как и в прошлом случае, следует транспонировать. В качестве образа отображения моментов получаем суммы Минковского векторов из множеств:  $\{e_q^*\}, \{e_{i_1}^* + e_{i_2}^*\}, \{e_{j_1}^* + \dots + e_{j_k}^*\}, \{e_{s_1}^* + \dots + e_{s_{n-1}}^*\}$ , где  $q, i_1, i_2, j_1, \dots, j_k, \dots, s_1, \dots, s_{n-1} \in \{1, \dots, n\}$ . Всевозможные суммы образуют пермutoэдр. Кроме точек, образующих пермutoэдр появятся некоторое количество посторонних точек, но они все будут лежать внутри многогранника, поэтому ключевой роли не играют. Доказательство сюръективности отображения полностью повторяет доказательство из аналогичного утверждения для грассманиана.  $\square$

образ отображения моментов для многообразия частичных флагов будет также суммой Минковского, но не всех множеств  $\{e_q^*\}, \{e_{i_1}^* + e_{i_2}^*\}, \{e_{j_1}^* + \dots + e_{j_k}^*\}, \{e_{s_1}^* + \dots + e_{s_{n-1}}^*\}$ , а выборочных, причем выбор соответствует набору размерностей множеств флага, т.е.  $\mu(Fl(n, k_1, \dots, k_s))$  будет сумма Минковского векторов  $\{e_{i_1}^* + e_{i_{k_1}}^*\}, \{e_{j_1}^* + \dots + e_{j_{k_s}}^*\}$ . В результате получается также выпуклый многогранник, по строению схожий с пермutoэдром.

## Список литературы

- [1] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015 (518 стр.).
- [2] Mich'ele Audin. The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Progress in Mathematics, 93. Birkh"auser, Basel, 1991.
- [3] Michael Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. Bull. London Math. Soc. 14 (1982), no. 1, 1–15.
- [4] Г.М. Гроель, Вик. С. Куликов, О симплектических накрытиях проективной плоскости, Серия Математическая, том 69, № 4, 2005, стр 19-58.
- [5] И. М. Гельфанд, В. В. Серганова, Страты максимального тора в компактном однородном пространстве, Докл. АН СССР, 1987, том 292, номер 3, 524–528.