Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топлогии

Курсовая работа

Образ отображения моментов для действия тора на многообразии частичных флагов

Выполнила:
студентка 303 группы
Максименко Дарья Глебовна

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2024

Содержание

1 Введение

Изучение отображения моментов в теории многообразий является одной из ключевых тем в контексте симплектической геометрии и алгебраической топологии. Образы моментов играют важную роль в описании геометрических и топологических свойств различных многообразий. Цель данной курсовой работы заключается в нахождении образов моментов для многообразий частичных и полных флагов.

В рамках работы будет проведен последовательный анализ нескольких важных многообразий:

1. **Образ моментов для комплексного пространства** $\mathbb{C}^n$. Начнем с рассмотрения образа моментов для самого простого случая — комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, что позволит заложить основы для дальнейшего анализа более сложных структур.

2. **Образ моментов для проективного пространства** $\mathbb{CP}^n$. Следующим шагом станет изучение проективного пространства $\mathbb{CP}^n$, где образ моментов представляет собой важный инструмент для понимания его симплектической структуры.

3. **Образ моментов для многообразия Грассмана** $G(k, n)$. Далее, внимание будет уделено многообразию Грассмана $G(k, n)$, которое обобщает концепции предыдущих примеров и является фундаментальным объектом в теории представлений и алгебраической геометрии.

4. **Сложение результатов и получение итогового результата**. Завершающим этапом работы станет интеграция полученных данных для определения общего образа моментов для многообразий частичных и полных флагов.

Каждый из вышеперечисленных шагов является важной составляющей для достижения основной цели курсовой работы. Поэтапное рассмотрение и анализ позволит выстроить цельную картину и глубже понять взаимосвязи между различными типами многообразий.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за помощь, внимание и ценные советы. Также автор благодарит Дмитрия Цыганкова и Викторию Оганисян за ценные обсуждения.

2 Основные определения

В работе будут использоваться следующие определения.

Определение 2.1. *Проективное пространство* $\mathbb{CP}^n$ *- совокупность проходящих через 0 прямых пространства* $\mathbb{C}^{n+1}$*, топологизированная угловой метрикой: расстояние между двумя прямыми равно углу между ними.*

Определение 2.2. *Координаты* $[x_0 : ... : x_n]$ *направляющие вектора прямой (определенные, очевидно, с точностью до пропорциональности) называются однородными координатами точки проективного пространства.*

Определение 2.3. *Многообразия Грассмана - это обобщение проективных пространств. Комплексное многообразие Грассмана* $G(n, k)$ *определяется, как пространство* k*-мерных подпространств протсранства* $\mathbb{C}^n$.

$G(n, k) = G(n, n-k)$

$G(n, 1) = \mathbb{RP}^{n-1}$

Подпространство $\pi \subset \mathbb{C}^n$ *размерности* k *задаётся* k*-поливектором* $v_1 \wedge ... \wedge v_k \in \Lambda^k\mathbb{C}^n$ *или (в координатах) классом эквивалентности* $[P]$ *матриц* P *размера* $k \times n$.

Определение 2.4. ***Координаты на многообразиях Грассмана.*** *Фиксируем в пространстве* $\alpha \in G(n, k)$ *базис, запишем координаты базисных векторов (в пространстве* $\mathbb{C}^n$ *в виде* $k \times n$*-матрицы и вычисляем все* $\binom{n}{k}$ *миноров порядка* k*. Получающиеся числа не все равны 0 и при замене базиса в* α *умножаются на одно и то же число. Такой набор из* $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *чисел* $\{p_{i_1...i_k}\}$ *является координатами поливектора* $v_1 \wedge ... \wedge v_k$ *в стандартном базисе* $\{e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}\}$ *внешней степени* $\Lambda^k\mathbb{C}^n$ *и называется координатами Плюккера* k*-мерной плоскости.*

Отображение

$$G_k(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{CP}(\Lambda^k\mathbb{C}^n) = \mathbb{CP}^{\binom{n}{k}-1}$$
$$[v_1 \wedge ... \wedge v_k] \mapsto [... : p_{i_1...i_k} : ...]$$

является вложением гладкого подмногообразия, а его образ задаётся соотношениями

$$\sum_{r=1}^{k+1} (-1)^r p_{i_1...i_{k-1}j_r} p_{j_1...\hat{j_r}...j_{k+1}} = 0$$

Определение 2.5. *Многообразие флагов - это обобщение многообразий Грассмана. Пусть задан набор целых чисел* $1 \leq k_1 < ... < k_s \leq n-1$*. Флагом типа* $(k_1, ..., k_s)$ *в* $\mathbb{C}^n$ *называется цепочка* $U_1 \subset ...U_s$ *подпространств пространствав* $\mathbb{C}^n$*, такая, что* $dimU_i = k_i$*. Совокупность флагов естественно топологизируется и превращается в многообразие флагов* $Fl(n; k_1, ..., k_s)$.

$Fl(n; 1, ..., n-1)$ *называется многообразием полных флагов.*

Определение 2.6. *Симплектическое многообразие - это пара* (W, ω)*, где* W *- гладкое многообразие и* ω *- замкнутая дифференциальная 2-форма, невырожденная в каждой точке. Размерность симплектического многообразия* W *всегда четная.*

Определение 2.7. *Стандартный тор -*

$\mathbb{T}^n = \{\boldsymbol{t} = (t_1, ...t_n) \in \mathbb{C}^n : |t_i| = 1 \ for \ i = 1, ..., n\}$

Действие тора описывается следующим образом:

$\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $(t_1, ..., t_n) \cdot (z_1, ...z_n) = (t_1z_1, ...t_nz_n)$

Определение 2.8. *Пусть тор $\mathbb{T}$ действует на W, сохраняя симплектическую форму ω. Обозначим алгебру Ли тора $\mathbb{T}$ через τ (т.к. тор коммутативен, то алгебра Ли тривиальна). Для каждого $v \in \tau$ обозначим через X_v соответствующее T-инвариантное векторное поле в W. Действие тора называется гамильтоновым, если 1-форма $\omega(X_v, \cdot)$ точная для любого $v \in \tau$. Другими словами, действие гамильтоново, если для каждого $v \in \tau$ существует функция H_v на W (гамильтонианы), удовлетворяющие условию:*

$$\omega(X_v, Y) = dH_v(Y)$$

для любого векторного поля Y на W. Функции H_v определены с точностью до константы. Выберем базис $\{e_i\}$ в τ и соответствующие Гамильтонианы $\{H_{e_i}\}$. Тогда определено отображение моментов

$$\mu : W \to \tau^*,\ (x, e_i) \mapsto H_{e_i}(x),$$

где $x \in W$.

Ключевой результат, который позволяет нам однозначно сделать выводы об образе отображения моментов описан в [3]:

Теорема 2.1. *Пусть M - компактное связное симплектическое многообразие и пусть $f_1, ..., f_n$ - n действительнозначный функций, которые коммутируе по Пуассону и Гамильтоновы векторные поля которых порождают действие тора. Тогда отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$, заданная f_i, удовлетворяет следующим условиям:*

- *все (не пустые) $f^{-1}(c)$ связные ($c \in \mathbb{R}^n$);*
- *образ $f(M)$ выпуклый*

Более того, если $Z_1, ...Z_N$ связных компонент множества $Z \subset M$ общих критических тоек f_i, то $f(Z_j) = c_j$ - одна точка, и $f(M)$ - выпуклая оболочка $c_1, ..., c_N$.

Если все f_i имеют гамильтоновы поля, порождающие круговое действие таким образом, что мы имеем симплектическое действие тора $\mathbb{T}^n$ на M. Такое отображение f называется отображением моментов.

3 Образ моментов для $\mathbb{C}^n$

Пример 3.1. *Самый просто пример образа моментов симплектического многообразия - $W = \mathbb{C}^n$ с симплектической формой*

$$\omega = i \sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k = 2 \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k$$

где $z_k = x_k + iy_k$. *Координатное действие тора* $\mathbb{T}^n$ *на* $\mathbb{C}^n$ *является гамильтоновым. Образом моментов* $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n$ *является* $\mu(z_1, ...z_n) = (|z_1|^2, ...|z_n|^2)$. *То есть образ отображения моментов* μ *- это положительный ортант* $\mathbb{R}^n_{\leq}$.

Доказательство. Компактный тор $\mathbb{T}^n$ действует на $\mathbb{C}^n$ по координатам. Действие тора является гамильтоновым, если существует функция H_v на W, такая что:

$$\omega(X_v, Y) = dH_v(Y)$$

для любого векторного поля Y на W. В данном случае $v \in \mathfrak{t}$ — элемент алгебры Ли тора $\mathbb{T}^n$.

Выберем базис $\{e_i\}$ в $\mathfrak{t}$, и соответствующие гамильтоновы функции $\{H_i\}$. Тогда моментное отображение определяется как:

$$\mu : W \to \mathfrak{t}^*, \quad (x, e_i) \mapsto H_i(x).$$

Рассмотрим элемент e_k базиса алгебры Ли $\mathfrak{t}$ тора $\mathbb{T}^n$. Векторное поле X_{e_k}, порождаемое действием этого элемента, можно найти, дифференцируя действие тора по параметру θ_k.

Для координаты z_j имеем:

- Если $j \neq k$, то z_j не меняется под действием $e^{i\theta_k}$, поэтому $X_{e_k}(z_j) = 0$.
- Если $j = k$, то:

  $$z_k \mapsto e^{i\theta_k} z_k.$$

  Дифференцируя по θ_k при $\theta_k = 0$, получаем:

  $$\frac{d}{d\theta_k}\bigg|_{\theta_k=0} (e^{i\theta_k} z_k) = \frac{d}{d\theta_k}\bigg|_{\theta_k=0} (z_k \cos(\theta_k) + iz_k \sin(\theta_k)) = iz_k.$$

  Это означает, что действие $e^{i\theta_k}$ на z_k генерирует векторное поле $X_{e_k} = iz_k \frac{\partial}{\partial z_k}$.

Для сопряжённой координаты $\bar{z}_k$ действие тора $\mathbb{T}^n$ таково:

$$\bar{z}_k \mapsto e^{-i\theta_k} \bar{z}_k.$$

Дифференцируя по θ_k при $\theta_k = 0$, получаем:

$$\frac{d}{d\theta_k}\bigg|_{\theta_k=0} (e^{-i\theta_k} \bar{z}_k) = \frac{d}{d\theta_k}\bigg|_{\theta_k=0} (\bar{z}_k \cos(-\theta_k) + i\bar{z}_k \sin(-\theta_k)) = -i\bar{z}_k.$$

Это означает, что действие $e^{i\theta_k}$ на $\bar{z}_k$ генерирует векторное поле $X_{e_k} = -i\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$.

Таким образом, векторное поле X_{e_k}, соответствующее действию элемента e_k алгебры Ли тора $\mathbb{T}^n$ на координате z_k многообразия $\mathbb{C}^n$, имеет вид:

$$X_{e_k} = iz_k \frac{\partial}{\partial z_k} - i\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}.$$

Теперь найдём соответствующую гамильтонову функцию H_k для векторного поля X_{e_k}, которая должна удовлетворять уравнению:

$$\omega(X_{e_k}, \cdot) = dH_k(\cdot).$$

Проверим, что $H_k(z) = |z_k|^2$ является подходящей функцией. Вычислим внешнюю производную dH_k:

$$dH_k = d(|z_k|^2) = d(z_k \bar{z}_k) = z_k d\bar{z}_k + \bar{z}_k dz_k$$

Теперь проверим, что $\omega(X_{e_k}, \cdot) = dH_k$. Для этого возьмём произвольное векторное поле Y и вычислим $\omega(X_{e_k}, Y)$:

$$\omega(X_{e_k}, Y) = \omega(iz_k \frac{\partial}{\partial z_k} - i\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y)$$

Подставляя $\omega = idz_k \wedge d\bar{z}_k$:

$$\omega(iz_k \frac{\partial}{\partial z_k}, Y) = i \cdot iz_k \cdot \omega(\frac{\partial}{\partial z_k}, Y) = -z_k \omega(\frac{\partial}{\partial z_k}, Y)$$

$$\omega(i\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y) = -i \cdot -i\bar{z}_k \cdot \omega(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y) = \bar{z}_k \omega(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y).$$

Таким образом,

$$\omega(X_{e_k}, Y) = -z_k \omega(\frac{\partial}{\partial z_k}, Y) + \bar{z}_k \omega(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y).$$

С учётом определения ω,

$$\omega(\frac{\partial}{\partial z_k}, Y) = d\bar{z}_k(Y),\ \omega(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, Y) = dz_k(Y),$$

поэтому

$$\omega(X_{e_k}, Y) = -z_k d\bar{z}_k(Y) + \bar{z}_k dz_k(Y) = (z_k d\bar{z}_k + \bar{z}_k dz_k)(Y) = dH_k(Y).$$

Так как $|z_k|^2 \geq 0$ для каждого k, образ моментного отображения μ является положительным ортантом в $\mathbb{R}^n$:

$$\mu(\mathbb{C}^n) = \mathbb{R}^n_{\geq}.$$

□

4 Образ моментов для $\mathbb{CP}^n$

Конструкция 4.1. *Дифференциальная форма Фубини-Штуди Рассмотрим комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Снабдим его эрмитовым скалярным умножением:*

$$\varkappa(v, w) = \gamma(v, w) + i \cdot \omega(v, w) \qquad (v, w \in V),$$

где вещественная часть γ - это вещественное скалярное умножение (положительно определённая симметрическая билинейная форма), а мнимая часть ω - кососкалярное умножения (невырожденная кососимметрическая билинейная форма).Они связаны друг с другом следующим образом:

$$\omega(v, w) = \gamma(v, Iw),$$

где $I : V \to V$ - оператор умножения на i.

Проекция $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ отображает вектор в точку $x = \langle v \rangle$ проективного пространства (т.е. прямую в $\mathbb{C}^{n+1}$). Её дифференциал $d_v p : T_v\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1} \to T_x\mathbb{CP}^n$ сюрьективен, причем $Kerd_v p = \langle v \rangle$. Значит,

$$d_v p : \langle v \rangle^\perp \to T_x\mathbb{CP}^n$$

- изоморфизм векторных пространств, с помощью кторого можно перенести эрмитово скалярное умножение $\varkappa$ на пространство $T_x\mathbb{CP}^n$. Полученное эрмитово скалярное умножение зависит от выбора вектора $v \in p^{-1}(x)$: если взять $w = \lambda v$ ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), то $d_v p = d_w p \cdot \lambda$, поэтому при замене v на w эрмитова форма умножается на $|\lambda|^2$. Чтобы это исправить, нужно нормировать вектор v условием $\varkappa(v, v) = 1$.

Его мнимая часть w_x определяет кососкалярное умножение на $T_x\mathbb{CP}^n$, и таким образом на $\mathbb{CP}^n$ возникает невырожденная внешняя 2-форма ω, которая и называется формой Фубини-Штуди. В однородных координатах $[z_1 : ... : z_n : z_{n+1}] \in \mathbb{CP}^n$ она выражается следующим образом:

$$\omega = \frac{i}{(\sum_{j=0}^{n+1} \overline{z}_j z_j)^2} \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{j \neq k} (\overline{z}_j z_j dz_k \wedge d\overline{z}_k - \overline{z}_j z_k dz_j \wedge d\overline{z}_k)$$

.

Утверждение 4.2. *Образ моментов для $\mathbb{CP}^n$ Рассмотрим $\mathbb{CP}^n$ с действием тора $\mathbb{T}^{n+1}$. с отображением моментов:*

$$\mu([z_0 : ... : z_n]) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n}(|z_0|^2, ..., |z_n|^2)$$

и $\mu(\mathbb{CP}^n)$ - выпуклая оболочка базисных векторов $e_0, ..., e_n$.

Доказательство. Это очевидно из построения симплектической формы для $\mathbb{CP}^n$. Также этот факт можно доказать по аналогии с предыдущим утверждением □

5 Образ моментов для $G(k, n)$

Утверждение 5.3. *$\mu(G(k, n))$ - выпукнлый многогранник в $\mathbb{R}^n$, заданный следующими ограничениями:*

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i = k \qquad 0 \leq \xi_i \leq 1.$$

Такой многогранник называется гиперсимплексом и обозначается Δ_k^n.

Доказательство. Напомним свойство вложения многообразия Грассмана:

Отображение

$$\begin{gathered}G_k(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{CP}(\Lambda^k\mathbb{C}^n) = \mathbb{CP}^{\binom{n}{k}-1}\\ [v_1 \wedge ... \wedge v_k] \mapsto [... : p_{i_1...i_k} : ...]\end{gathered}$$

является вложением гладкого подмногообразия. Если координаты в $\mathbb{C}^n$ задаются, как набор из n комплексных чисел $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}\langle e_1, ..., e_n\rangle$, то координаты в $\Delta^k\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n\langle e_1 \wedge ... \wedge e_k, ..., e_{n_k}, ..., e_n\rangle = \langle w_{1...k}, ..., w_{n-k}...w_n\rangle$ - координаты Плюккера с индексами, равными всеми перестановками по k чисел из множества $\{1, .., n\}$.

На многообразие Грассмана $G_k(\mathbb{C}^n)$ действует тор размерности n $\mathbb{T}^n$, а на $\mathbb{CP}(\Lambda^k\mathbb{C}^n) = \mathbb{CP}^{\binom{n}{k}-1}$ — тор $\mathbb{T}^{\binom{n}{k}}$. Из вложения многообразия следует вложенность тора, которые порождает на него действие. Следует выяснить, как именно вложен тор $\mathbb{T}^n$ в $\mathbb{T}^{\binom{n}{k}}$. Заметим, как действует тор на базисные вектора:

$\bar{t} = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{T}^n$

$\bar{t}e_1 = t_1e_1;$

$\bar{t}e_k = t_ke_k;$

$\bar{t}e_1 \wedge e_2 = t_1e_1 \wedge t_2e_2 = t_1t_2(e_1 \wedge e_2);$

$\bar{t}e_1 \wedge \cdots \wedge e_k = t_1t_2 \cdots t_k(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k).$

Получим, что

$$\mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{T}^{\binom{n}{k}}$$

$$(t_1, t_2, ..., t_n) \mapsto (t_1t_2...t_k, ..., t_{n-k}t_{n_k+1}...t_n)$$

Заметим, что тор, вложенный таким образом, сохраняет уравнение многообразия Грассмана в проективном пространстве $\mathbb{CP}^{\binom{n}{k}-1}$. Матрица Якоби последнего отображения состоит из $\binom{n}{k}$ по строк по n чисел, из которых k единиц и n-k нулей. В i-той строке матрицы единицы стоят на местах согласно i-й координате из последнего отображения. Для случая $G(2, 4)$ матрица Якоби выглядит следующим образом:

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) \mapsto (t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4, t_2, t_3, t_2, t_4, t_3, t_4)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

На двойственных алгебрах Ли есть обратное соотношение, т.е. проекция $\tau^* = (\mathbb{R}^{\binom{n}{k}})^* \to (\mathbb{R}^n)^*$. Значит, выпуклая оболочка базисных векторов в образе моментов для проективного пространства с действием тора соответствующей размерности проецируется но образ моментов с новым действием тора. Как выглядит этот образ легко понять, применив транспонированную матрицу Якоби:

$$\langle (e_1 \wedge ... \wedge e_k)^*, ..., (e_{n-k} \wedge ... \wedge e_n)^* \rangle \mapsto \langle e_1^* + ... + e_k^*, ..., e_{n-k}^* + ... + e_n^* \rangle$$

По определению, это гиперсимплекс Δ_k^n, но это образ моментов для $\mu_{\mathbb{T}^n}(\mathbb{CP}^{\binom{n}{k}-1})$. Для того, чтобы доказать, что этот образ моментов совпадает с образом моментов для грассманиана, осталось понять, что это отображение сюръективно. Все неподвижные точки (базисные вектора) для этого действия уже лежат в $G(k,n)$, значит его образ моментов совпадает с гиперсимплексом. □

6 Образ моментов для $Fl(\mathbb{C}^n)$ и для $Fl(n, k_1, ..., k_s)$

Теорема 6.4. *Образ отображения моментов для многообразия полных флагов $Fl(\mathbb{C}^n)$ - n-мерный пермутоэдр.*

Доказательство. Доказательство во многом повторяет схему доказательства вида образа моментов для многообразия Грассмана. Существенная разница заключается в том, что теперь многообразие вложено в прозведение грассманианов, которые в свою очередь, вложены в свои проективные пространства.

$$Fl(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow G(1,n) \times G(2,n) \times ... \times G(n-1,n) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^n) ... \times \mathbb{P}(\Lambda^{n-1}\mathbb{C}^n)$$

На $Fl(\mathbb{C}^n)$ действует тор $\mathbb{T}^n$. Он вложен в тор размерности $2^n - 2$ и должен сохранять уравнения всех грассманианов, как гиперповерхностей, т.е.

$G(1,n) : (t_1, ..., t_n)(w_1 : ... : w_n) = (t_1 w_1 : ... : t_n w_n)$,
$G(2,n) : (t_1, ..., t_n)(w_{12} : ... : w_{n-1n}) = (t_1 t_2 w_{12} : ... : t_{n-1} t_n w_{n-1n},)$
$\cdots$
$G(k,n) : (t_1, ..., t_n)(w_{12...k} : ... : w_{n-k...n}) = (t_1 ... t_k w_{12...k} : ... : t_{n-k} .... t_n w_{n-k...n})$,
где $k \in 1, ..., n-1$ и $w_{...}$ - плюккеровы координаты грассманиана.

Якобиан отображения $\mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{T}^{2^n-2}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{cl}
\overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0}}^{\text{n}} & \\
\left(\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{условие для G(1,n)} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{условие для G(2,n)} \\
\\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{условие для G(n-1,n)}
\end{array}
\end{array}$$

Для того, чтобы спроецировать образ моментов эту матрицу также, как и в прошлом случае, следует транспонировать. В качестве образа моментов получаем суммы Минковского векторов из множеств: $\{e_q^*\}, \{e_{i_1}^* + e_{i_2}^*\}, \{e_{j_1}^* + ... + e_{j_k}^*\}, \{e_{s_1}^* + ... + e_{s_{n-1}}^*\}$, где $q, i_1, i_2, j_1, ..., j_k, ..., s_1, ..., s_{n-1} \in \{1, ..., n\}$. Всевозможные суммы образуют пермутоэдр. Кроме точек, образующих пермутоэдр появятся некоторое количество посторонних точек, но они все будут лежать внутри многогранника, поэтому ключевой роли не играют. Доказательство сюръективности отображения полностью повторяет доказательство из аналогичного утверждения для грассманиана. □

Образ моментов для многообразия частичных флагов будет также суммой Минковского, но не всех множеств $\{e_q^*\}, \{e_{i_1}^* + e_{i_2}^*\}, \{e_{j_1}^* + ... + e_{j_k}^*\}, \{e_{s_1}^* + ... + e_{s_{n-1}}^*\}$, а выборочных, причем выбор соответствует набору размерностей множеств флага, т.е. $\mu(Fl(n, k_1, ..., k_s))$ будет сумма Минковского векторов $\{e_{i_1}^* + e_{i_{k_1}}^*\}, \{e_{j_1}^* + ... + e_{j_{k_s}}^*\}$. В результате получается также выпуклый многогранник, по строению схожий с пермутоэдром.

Список литературы

[1] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015 (518 стр.).

[2] Mich‘ele Audin. The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Progress in Mathematics, 93. Birkh¨auser, Basel, 1991.

[3] Michael Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. Bull. London Math. Soc. 14 (1982), no. 1, 1–15.

[4] Г.-М. Гроель, Вик. С. Куликов, О симплектических накрытиях проективной плоскости, Серия Математическая, том 69, № 4, 2005, стр 19-58.

[5] И. М. Гельфанд, В. В. Серганова, Страты максимального тора в компактном однородном пространстве, Докл. АН СССР, 1987, том 292, номер 3, 524–528.