ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Классы SU-бордизмов, представляемые гиперповерхностями Калаби-Яу в торических многообразиях Фано

Выполнил студент
603 группы
Корюкин Григорий Валерьевич

____

подпись студента

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

____

подпись научного руководителя

Москва

2024 г.

1. Введение

Теория SU-бордизмов представляет собой обобщённую теорию гомологий на SU-многообразиях (со специальной унитарной структурой в стабильно касательном расслоении). Классический результат Новикова описывает кольцо кобордизмов Ω^{SU} с обращенной двойкой, как алгебру многочленов [1, Приложение 1] . Образующие этой алгебры – классы SU-бордизма некоторых многообразий. Возникает естественная задача – построить геометрические представители этих образующих, то есть многообразия, представляющие данные элементы Ω^{SU}.

В работе [2] была предъявлена явная конструкция семейства квазиторических многообразий, допускающих SU-структуру. В той же работе было показано, что в комплексной размерности больше 5 элементы $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$ (см. теорему 2.4) могут быть представлены квазиторическими многообразиями. Однако в меньшей размерности квазиторические многообразия бордантны нулю. Следовательно, квазиторические многообразия не позволяют описать всё кольцо Ω^{SU}.

Конструкция Батырева [3] позволяет получать многообразия Калаби-Яу как алгебраические гиперповерхности в гладких торических многообразиях Фано. Многообразия Калаби-Яу являются SU-многообразиями, и в работе [4] доказано, что их классы мультипликативно порождают кольцо SU-бордизмов. Более точно, неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}$ представляются линейными комбинациями гиперповерхностей Калаби-Яу.

В [5] авторы ставят вопрос: какие классы бордизма из Ω^{SU} могут быть представлены многообразиями Калаби-Яу? Этот вопрос является SU-аналогом известной проблемы Хирцебруха: какие классы бордизма из Ω^{U} содержат связные (неприводимые) неособые алгебраические многообразия?

В настоящей работе получены частичные результаты, касающиеся геометрического представления классов SU-бордизмов. В первую очередь доказано, что элементы $y_i \in \Omega^{SU}$ не могут быть реализованы с помощью гиперповерхностей Калаби–Яу в произведениях комплексных проективных пространств (см. теорему 3.5).

Особый интерес представляет ситуация в малых размерностях, где невозможно применить известные результаты о представимости классов SU-бордизмов с использованием квазиторических многообразий. В связи с этим было установлено, что гиперповерхности Калаби–Яу в гладких торических многообразиях Фано размерностей 4 и 5 не представляют неразложимые элементы y_3 и y_4 (см. теорему 4.1).

Автором было выдвинуто предположение 4.2, после чего внимание было сосредоточено на оценке чисел Милнора гиперповерхностей Калаби–Яу, вложенных в гладкие торические многообразия Фано. В предложении 4.3 был найден многогранник, на котором достигаются максимальные значения по модулю для s-чисел в размерностях 4 и 5, а также вычислены значения чисел Милнора в произвольной размерности.

Предполагается, что именно для данного многогранника достигается точная верхняя граница модуля s-чисел, соответствующих гиперповерхностям Калаби–Яу.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю, профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за ценные советы, внимательное отношение и постоянную поддержку на всех этапах подготовки данной работы, а также Федору Вылегжанину и Георгию Черных за плодотворные обсуждения.

2. Предварительные сведения

Для любого разбиения $i_1, \ldots, i_r$ числа k определим полином $s_{i_1,\ldots,i_r}$ от k переменных следующим образом. Выберем $n \geqslant k$, так что элементарные симметрические функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ от переменных $t_1, \ldots, t_n$ алгебраически независимы, и положим $s_{i_1,\ldots,i_r}$ равным однозначно определенному полиному от k переменных $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, для которого

$$s_{i_1,\ldots,i_r}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \sum t_1^{i_1} \ldots t_r^{i_r}$$

Заменим в выражении элементарные симметрические функции $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ на классы Чженя $c_1, \ldots, c_k$. Полученное выражение – характеристический класс $s_{i_1,\ldots,i_r}$. Этот материал подробно изложен в [6].

Один важный характеристический класс - это класс s_n. Он определяется как многочлен от классов Чженя $c_1, \ldots, c_n$, который получается, если выразить симметрический многочлен $x_1^n + \cdots + x_n^n$ через элементарные симметрические многочлены, а затем заменить каждый элементарный симметрический многочлен на c_i. Определим соответствующее характеристическое число формулой

$$s_n[M] := \langle s_n(\mathscr{T}M), [M] \rangle.$$

Оно известно как s-число или число Милнора многообразия M.

2.1. **Теория SU-бордизмов.**

Здесь мы кратко изложим необходимые определения и результаты, связанные с теорией SU-бордизмов, следуя во многом обзору [5].

Первым структурным результатом о кольце Ω^{SU} была теорема С.П. Новикова 1962 г., показывающая, что Ω^{SU} становится полиномиальным кольцом после обращения двойки (хотя само Ω^{SU} не является полиномиальным даже по модулю кручения). Этот результат был доказан после аналогичной теоремы для кольца Ω^U. Класс бордизмов $[M^{2i}] \in \Omega^U_{2i}$ является полиномиальной образующей в Ω^U тогда и только тогда, когда $s_i[M^{2i}] = \pm m_i$, где

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i+1 \neq p^k \text{ ни для какого простого } p; \\ p, & \text{если } i+1 = p^k \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } k > 0. \end{cases}$$

Более сложные условия делимости на s_i-число позволяют определить и полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$.

Теорема 2.1 (С.П. Новиков [1, Приложение 1])**.** *$\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ представляет собой полиномиальное кольцо с одной образующей в каждой четной размерности $\geqslant 4$:*

$$\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][y_i : i \geqslant 2], \quad \deg y_i = 2i.$$

Класс бордизмов SU-многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной образующей y_i тогда и только тогда, когда

$$s_i[M^{2i}] = \pm m_i m_{i-1} \quad \text{с точностью до степени двойки.}$$

Аналогичное описание кольца c_1-сферических бордизмов $\mathscr{W}$ дает следующая теорема.

Теорема 2.2 ([5, Теорема 6.10]). *Кольцо $\mathscr{W}$ является полиномиалЪным кольцом с образующими в каждой положительной четной размерности за исключением 4:*

$$\mathscr{W} \cong \mathbb{Z}\left[x_1, x_i : i \geqslant 3\right], \quad x_1 = \left[\mathbb{C}P^1\right], \quad \deg x_i = 2i$$

Полиномиальные образующие x_i выделяются условием $s_i(x_i) = \pm m_i m_{i-1}$ для $i \geqslant 3$. Граничный оператор $\partial : \mathscr{W} \to \mathscr{W}, \partial^2 = 0$, удовлетворлет равенству

$$\partial(a * b) = a * \partial b + \partial a * b - x_1 * \partial a * \partial b,$$

и полиномиальные образующие $\mathscr{W}$ можно выбрать так, что

$$\partial x_1 = 2, \quad \partial x_{2i} = x_{2i-1}.$$

Кольца Ω^{SU} и $\mathscr{W}$ связывает следующий результат.

Теорема 2.3 ([5, Теорема 5.11.]). *(a) Tors $\Omega_n^{SU} = 0$ для всех n, за исключением $n = 8k+1$ или $8k+2$, когда Tors Ω_n^{SU} есть $\mathbb{Z}_2$-модуль размерности, равной количеству разбиений числа k.*

(b) Ω_{2i}^{SU} / Tors изоморфно образу забывающего гомоморфизма $\alpha : \Omega_{2i}^{SU} \to \Omega_{2i}^{U}$, который равен $\mathrm{Ker}\,(\partial : \mathscr{W}_{2i} \to \mathscr{W}_{2i-2})$, если $2i \not\equiv 4 \bmod 8$, и $\mathrm{Im}\,(\partial : \mathscr{W}_{2i} \to \mathscr{W}_{2i-2})$, если $2i \equiv 4 \bmod 8$.

Следующая теорема описывает, какие минимальные значения могут принимать s-числа образующих y_i.

Теорема 2.4. *[5, Теорема 7.1] Существуют неразложимые элементы $y_i \in \Omega_{2i}^{SU}$, $i \geqslant 2$ с минимальными s-числами $s_i(y_i) = g(i+1)$, где*

$$g(n) = \begin{cases} 2m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n > 3 \text{ нечетно;} \\ m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n > 3 \text{ четно;} \\ -48, & \text{если } n = 3 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Гомоморфизм забывания $\alpha : \Omega^{SU} \to \mathscr{W}$ отображает эти элементы следуюшим образом:

$$y_2 \mapsto 2x_1^2, \quad y_{2k-1} \mapsto x_{2k-1}, \quad y_{2k} \mapsto 2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}, \quad k \geqslant 2,$$

где x_i – полиномиальные образующие кольца $\mathscr{W}$. в частности, кольцо $\Omega^{SU}\ \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\left[y_i : i \geqslant 2\right]$ вкладывается в (7.1) в качестве полиномиального подкольца, порожденного элементами x_1^2, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1 x_{2k-1}$.

2.2. **Торические многообразия.** Многогранник P называется *неособым*, если его нормальный веер Σ_P неособый. Неособые проективные торические многообразия соответствуют неособым целочисленным многогранникам. Заметим, что неособый n-мерный многогранник P обязательно является *простым*, т. е. в каждой его вершине v сходятся в точности n гиперграней.

Неприводимые тор-инвариантные дивизоры на V суть алгебраические торические подмногообразия в V комплексной коразмерности 1 , соответствующие одномерным конусам веера Σ. Когда V проективно, они также отвечают гиперграням многогранника P. В дальнейшем мы предполагаем, что имеется m одномерных конусов (или гиперграней), и обозначаем соответствующие им примитивные векторы через $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, а соответствующие подмногообразия коразмерности 1 (неприводимые дивизоры) через $D_1, \ldots, D_m$.

Теорема 2.5 (теорема Данилова-Юркевича [5, Теорема 8.1])**.** *Пусть V - неособое торическое многообразие комплексной размерности n с полным неособым веером Σ. Тогда кольцо когомологий $H^*(V;\mathbb{Z})$ порождено двумерными классами v_i, двойственными к инвариантным подмногообразиям D_i, и имеет место изоморфизм*

$$H^*(V;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\left[v_1, \ldots, v_m\right]/\mathscr{I}, \quad \deg v_i = 2$$

где $\mathscr{I}$ – идеал, порожденный элементами следующих двух типов:

(a) $v_{i_1}\cdots v_{i_k}$ такие, что $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}$ не порождают конуса из Σ;
(b) $\sum_{i=1}^m \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle v_i$ дляя любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Удобно рассматривать целочисленную $(n\times m)$-матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

столбцами которой являются векторы $\boldsymbol{a}_i$, записанные в стандартном базисе $\mathbb{Z}^n$. Тогда идеал в пункте (b) теоремы 8.1 порожден n линейными формами $a_{j1}v_1 + \cdots + a_{jm}v_m$, соответствующими строкам матрицы Λ.

Далее под торическим многообразием мы будем подразумевать неособое полное (компактное) торическое многообразие.

2.3. **Конструкция Батырева.** Мы называем компактное кэлерово многообразие M с $c_1(M) = 0$ многообразием Калаби-Яу. По определению многообразие Калаби-Яу является SU-многообразием.

Дальше в тексте торические многообразия являются полными и неособыми, если не оговорено противное. Стандартная комплексная структура на торическом многообразии не может быть SU-структурой, поэтому среди торических многообразий нет многообразий Калаби-Яу. Однако следующая конструкция дает гиперповерхности Калаби-Яу в торических Горенштейновых многообразиях Фано [3].

Конструкция 2.6 (В.В. Батырев [5, Конструкция 11.1])**.** Торическое многообразие V называется многообразием Фано, если его антиканонический класс $D_1 + \cdots + D_m$ (представляющий $c_1(V)$) является очень обильным. В геометрических терминах, проективное вложение $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, отвечающее дивизору $D_1 + \cdots + D_m$, приходит из целочисленного многогранника P, в котором расстояние по решетке от 0 до каждой гиперплоскости, содержащей гипергрань, равно 1. Такой многогранник P называется рефлексивным; его двойственный многогранник P^* также является целочисленным.

Подмногообразие N, двойственное к первому классу Чженя $c_1(V)$, задается как гиперплоское сечение вложения $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, определяемого дивизором $D_1 + \cdots + D_m$. Поэтому $N \subset V$ является гладкой алгебраической гиперповерхностью в V, так что N - многообразие Калаби-Яу комплексной размерности $n-1$.

Таким образом, по любому торическому многообразию Фано V размерности n (или, эквивалентно, по любому неособому рефлексивному n-мерному многограннику P) можно построить каноническое $(n-1)$-мерное многообразие Калаби-Яу N_P.

Характеристические s-числа многообразий Калаби-Яу $N = N_P$ задаются следующим образом.

Лемма 2.7. *[5, Лемма 11.2] Имеет место формула:*

$$s_{n-1}(N) = \left\langle (v_1 + \cdots + v_m)\left(v_1^{n-1} + \cdots + v_m^{n-1}\right) - (v_1 + \cdots + v_m)^n, [V]\right\rangle.$$

Доказательство. Воспользуемся изоморфизмом комплексных векторных расслоений $\mathscr{T}N \oplus \nu \cong i^*\mathscr{T}V$, где ν – нормальное расслоение вложения $i : N \hookrightarrow V$. Поэтому $s_{n-1}(\mathscr{T}N) + s_{n-1}(\nu) = i^* s_{n-1}(\mathscr{T}V)$, и мы получаем

$$\begin{aligned}\langle s_{n-1}(\mathscr{T}N), [N]\rangle &= \langle -s_{n-1}(\nu) + i^* s_{n-1}(\mathscr{T}V), [N]\rangle \\ &= \left\langle c_1(\mathscr{T}V)\left(-c_1^{n-1}(\mathscr{T}V) + s_{n-1}(\mathscr{T}V)\right), [V]\right\rangle \\ &= \langle c_1(\mathscr{T}V) s_{n-1}(\mathscr{T}V) - c_1^n(\mathscr{T}V), [V]\rangle.\end{aligned}$$

□

В последующих выкладках, при отсутствии неоднозначности, обозначение i^* опускается.

3. Подмногообразия в $\mathbb{C}P^\omega$

Обозначим через $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$ неупорядоченное разбиение числа n в сумму k положительных целых чисел, т.е. $i_1 + \cdots + i_k = n$. Пусть Δ^i– стандартный рефлексивный симплекс размерности i. Тогда $P_\omega = \Delta^{i_1} \times \cdots \times \Delta^{i_k}$ есть рефлексивный многогранник, соответствующий торическому многообразию Фано $\mathbb{C}P^\omega = \mathbb{C}P^{i_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{i_k}$. Обозначим через N_ω гиперповерхность Калаби-Яу в $\mathbb{C}P^\omega$, получаемую применением конструкции Батырева.

Пусть $\widehat{P}(n)$– множество всех разбиений ω числа n на слагаемые, не превосходящие $n-2$. Таким образом,

$$\widehat{P}(n) = \{\omega = (i_1, \ldots, i_k) : i_1 + \cdots + i_k = n, \omega \neq (n), (1, n-1)\}.$$

Для каждого $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$ определен мультиномиальный коэффициент $C_n^\omega = \frac{n!}{i_1! \cdots i_k!}$. Положим

$$\alpha(\omega) = C_n^{\omega}\,(i_1+1)^{i_1}\cdots(i_k+1)^{i_k}\,. \tag{3.0.1}$$

Лемма 3.1. *[5, Лемма 12.1] Для любого $\omega \in \widehat{P}(n)$ имеет место равенство*

$$s_{n-1}\left(N_\omega\right) = -\alpha(\omega).$$

Лемма 3.2 ([5, Лемма 2.3]). *. При $n \geqslant 3$ имеет место соотношение*

$$\underset{\omega\in\widehat{P}(n)}{\text{н.о.д.}}\ \alpha(\omega) = g(n).$$

А значит можно получить полиномиальные образующие y_i в кольце $\Omega^{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$ как линейный комбинации.

Теорема 3.3 ([5, Теорема 12.3.]). *Классы SU-бордизмов гиперповерхностей Калаби-Яу N_ω в торических многообразиях $\mathbb{C}P^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{C}P^{i_k}$ с $\omega \in \widehat{P}(n), n \geqslant 3$, мультипликативно порождают кольцо SU-бордизмов $\Omega^{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$.*

Авторы формулируют следующий естественный вопрос:

Вопрос 3.4 ([5, Вопрос 12.4]). *Какие классы в кольце SU-бордизмов Ω^{SU} могут быть реализованы гиперповерхностями Калаби–Яу?*

Первым результатом в этом направлении является следующая теорема:

Предложение 3.5. *Гиперповерхности Калаби–Яу вида $N_{(\omega)}$ не может представлять неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}$ из теоремы 2.4 в комплексных размерностях, больших двух.*

Доказательство. Для того чтобы многообразие представляло y_i, необходимо выполнение условия

$$s_{n-1}(N_\omega) = \pm g(n).$$

Оценим $g(n)$, который определяется по формуле 2.4.1 (при $n > 3$):

$$0 \leqslant g(n) \leqslant 2m_{n-1}m_{n-2} \leqslant 2n(n-1), \quad \text{так как} \quad m_i \leqslant i+1.$$

Для всех $\omega \in \widehat{P}(n)$ верна лемма 3.1. Рассмотрим сначала два оставшихся случая $\omega = (n)$ и $\omega = (1, n-1)$ и найдём s-числа для них:

$$\begin{aligned}
s_{n-1}(N_{(n)}) &= \left\langle (n+1)u\cdot(n+1)u^{n-1} - ((n+1)u)^n, [V]\right\rangle\\
&= (n+1)^2 - (n+1)^n,\\
s_{n-1}(N_{(1,n-1)}) &= \left\langle (2u_1+nu_2)(2u_1^{n-1}+nu_2^{n-1}) - (2u_1+nu_2)^n, [V]\right\rangle\\
&= \left\langle 2nu_1u_2^{n-1} - C_n^{1,n-1}2u_1(nu_2)^{n-1} + (\text{мономы без } u_1u_2^{n-1})\right\rangle\\
&= 2n - 2n^n.
\end{aligned}$$

Таким образом:

$$\left|s_{n-1}(N_{(n)})\right| = (n+1)^n - (n+1)^2 \qquad \left|s_{n-1}(N_{(1,n-1)})\right| = 2n^n - 2n.$$

Проверим разность:

$$\begin{aligned}\left|s_{n-1}(N_{(n)})\right| - |g(n)| &= (n+1)^n - (n+1)^2 - 2n(n-1)\\ &= (n+1)^n - n^2 - 2n - 1 - 2n^2 + 2n\\ &= (n+1)^n - 3n^2 - 1 > 0, \quad \text{при} \quad n > 3,\end{aligned}$$

то есть $|g(n)| < \left|s_{n-1}(N_{(n)})\right|$.

Аналогично:

$$\begin{aligned}\left|s_{n-1}(N_{(1,n-1)})\right| - |g(n)| &= 2n^n - 2n - 2n(n-1)\\ &= 2n^n - 2n^2 > 0, \quad \text{при} \quad n > 3,\end{aligned}$$

следовательно, $|g(n)| < \left|s_{n-1}(N_{(1,n-1)})\right|$.

Таким образом, для них утверждение верно.

Теперь рассмотрим произвольное $\omega \in \widehat{P}(n)$. В силу леммы 3.1 и формулы 3.0.1:

$$s_{n-1}(N_\omega) = -\alpha(\omega),$$

где

$$\alpha(\omega) = C_n^{(i_1,\dots,i_k)}(i_1+1)^{i_1} + \dots + (i_k+1)^{i_k}.$$

Так как $(i+j)! \geqslant i!j!$ (следует из целочисленности C_{i+j}^i), то:

$$C_n^{(i_1,\dots,i_p,\dots,i_q,\dots,i_k)} \geqslant C_n^{(i_1,\dots,i_p+i_q,\dots,\widehat{i_q},\dots,i_k)},$$

и, в частности,

$$C_n^{(i_1,\dots,i_k)} \geqslant C_n^{(a,b)} \geqslant C_n^{(2,n-2)} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2},$$

где a, b – некоторые суммы частей из разбиения, $a + b = n$.

Кроме того, поскольку $k \geqslant 2$, имеем

$$(i_1+1)^{i_1} + \dots + (i_k+1)^{i_k} > 2 + 2.$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}|s_{n-1}(N_\omega)| = \alpha(\omega) > C_n^{(2,n-2)} \times (2+2) =\\ = \frac{n(n-1)}{2} \times 4 = 2n(n-1) \geqslant g(n).\end{aligned}$$

Следовательно, для всех разбиений ω при $n > 3$ выполнено:

$$|g(n)| < |s_{n-1}(N_\omega)|.$$

И только при $n = 3$ имеем

$$s_2(N_{(3)}) = s_2(N_{(1,1,1)}) = -48 = g(3).$$

□

4. Подмногообразия в гладких торических многообразиях Фано

Как показывает последняя теорема, гиперповерхности Калаби-Яу в $\mathbb{C}P^\omega$ не могут представлять неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}$ в комплексных размерностях, больших двух. Поэтому расширим рассматриваемое многообразий до всех гладких торических многообразий Фано. Как следует из раздела 2.3, они соответствуют неособым рефлексивным многогранникам. В каждой размерности таких многогранников конечное количество, и в малых размерностях они классифицированны [7,8].

Предложение 4.1. *Гиперповерхности Калаби-Яу в гладких многообразиях Фано размерностей 4 и 5 не могут представлять неразложимые элементы y_3 и $y_4 \in \Omega^{SU}$ из теоремы 2.4.*

Доказательство. Воспользовавшись базой данных [9] можно рассчитать s-числа для всех многообразий Калаби-Яу соответствующих рефлексивным многогранникам в размерности 4 и 5. Число $|s_3(N)|$ принимает значения от 216 до 720, а $|s_4(N)|$ от 2160 до 14240. Однако необходимые значения s-чисел для представления образующих из теоремы 2.4 есть

$$s_3\left(y_3\right) = m_3 m_2 = 6 \text{ и } s_4\left(y_4\right) = 2m_4 m_3 = 20,$$

Откуда немедленно следует утверждение. □

Непосредственные вычисления демонстрируют стремительный рост значений s-чисел соответствующих многообразий. Это наблюдение позволяет выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 4.2. *Гиперповерхности Калаби-Яу в гладких многообразиях Фано не могут представлять неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}$ в комплексных размерностях больших 2.*

Для ответа на поставленный вопрос попытаемся получить оценки для s-чисел. Для этого целесообразно рассмотреть те многогранники, на которых s-числа достигают наибольших и наименьших значений в размерностях 4 и 5. Заметим, что многогранники, на которых достигается минимальное значение s-чисел, различаются по своей структуре. В то же время многогранники, на которых s-числа максимальны, имеют схожую геометрию.

Предложение 4.3. *Многообразие Калаби–Яу, соответствующее многограннику с матрицей $n+2$ нормальных примитивных векторов:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

имеет характеристическое число

$$s_{n-1} = 2((n-1)^{n-1} + n) + (1 + (-1)^n)(n-1)^{n-2} - \frac{(2n-1)^n - 1}{n-1}.$$

Доказательство. Применяя теорему Данилова–Юркевича к данному вееру с $m = n+2$ примитивными векторами, получаем

$$H^*(V;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_{n+2}]/\mathscr{I},$$

где идеал $\mathscr{I}$ порождён соотношениями:

$$v_3 = \cdots = v_{n+1} = v_{n+2}, \qquad v_1 = v_2 + (n-1)v_{n+2} = v_2 + (n-1)v_3,$$

$$v_1 v_2 = 0, \qquad v_3 \cdots v_{n+2} = v_3^n = 0.$$

Фундаментальный класс:

$$[V] = v_1 v_4 \cdots v_{n+2} = v_1 v_3^{n-1}.$$

Используем выражение для s_{n-1} из леммы 2.7:

$$\begin{aligned}
s_{n-1}(N) &= \Big\langle (v_1 + \cdots + v_m)(v_1^{n-1} + \cdots + v_m^{n-1}) - (v_1 + \cdots + v_m)^n,\ [V] \Big\rangle \\
&= \Big\langle (v_1 + v_2 + n v_3)(v_1^{n-1} + v_2^{n-1} + n v_3^{n-1}) - (v_1 + v_2 + n v_3)^n,\ [V] \Big\rangle \\
&= \Big\langle (2v_1 + v_3)(v_1^{n-1} + v_2^{n-1} + n v_3^{n-1}) - (2v_1 + v_3)^n,\ [V] \Big\rangle \\
&= \Big\langle 2v_1^n + 2v_1 v_2^{n-1} + 2n v_1 v_3^{n-1} + v_1^{n-1} v_3 + v_2^{n-1} v_3 + n v_3^n - (2v_1 + v_3)^n,\ [V] \Big\rangle \\
&= \Big\langle 2v_1^n + 2n v_1 v_3^{n-1} + v_1^{n-1} v_3 + v_2^{n-1} v_3 - (2v_1 + v_3)^n,\ [V] \Big\rangle.
\end{aligned}$$

Теперь выразим степени v_1 и v_2 с помощью соотношений.

Для v_1^k:

$$\begin{aligned}
v_1^k &= v_1^{k-1} v_1 = v_1^{k-1}(v_2 + (n-1)v_3) = (n-1) v_1^{k-1} v_3 \\
&= \cdots = (n-1)^{k-1} v_1 v_3^{k-1}.
\end{aligned}$$

Для v_2^k:

$$\begin{aligned}
v_2^k &= v_2^{k-1}(v_1 - (n-1)v_3) = -(n-1) v_2^{k-1} v_3 \\
&= (-1)^{k-1}(n-1)^{k-1} v_2 v_3^{k-1} \\
&= (-1)^{k-1}(n-1)^{k-1}(v_1 - (n-1)v_3) v_3^{k-1} \\
&= (-1)^{k-1}(n-1)^{k-1} v_1 v_3^{k-1} + (-1)^k (n-1)^k v_3^k.
\end{aligned}$$

Теперь вернемся к формуле для $s_{n-1}(N)$:

$$s_{n-1}(N) = \Big\langle 2v_1^n + 2n v_1 v_3^{n-1} + v_1^{n-1} v_3 + v_2^{n-1} v_3 - (2v_1 + v_3)^n, [V] \Big\rangle.$$

Разложим выражения:

$$\begin{aligned}
2v_1^n &= 2(n-1)^{n-1}v_1v_3^{n-1},\\
v_1^{n-1}v_3 &= (n-1)^{n-2}v_1v_3^{n-1},\\
v_2^{n-1}v_3 &= \left[(-1)^{n-2}(n-1)^{n-2}v_1v_3^{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}v_3^n\right]v_3\\
&= (-1)^{n-2}(n-1)^{n-2}v_1v_3^{n-1}, \quad \text{так как } v_3^n = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
s_{n-1}(N) &= \left\langle \left(2(n-1)^{n-1} + 2n + (n-1)^{n-2} + (-1)^{n-2}(n-1)^{n-2}\right)v_1v_3^{n-1} - (2v_1+v_3)^n, [V]\right\rangle\\
&= 2((n-1)^{n-1}+n) + (1+(-1)^n)(n-1)^{n-2} - \left\langle (2v_1+v_3)^n, [V]\right\rangle.
\end{aligned}$$

Осталось вычислить последний член:

$$\begin{aligned}
(2v_1+v_3)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2v_1)^k v_3^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k(n-1)^{k-1}v_1v_3^{n-1} + v_3^n\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(2(n-1))^k\right)v_1v_3^{n-1} + v_3^n\\
&= \left(\frac{(2n-1)^n-1}{n-1}\right)v_1v_3^{n-1} + v_3^n.
\end{aligned}$$

Поскольку $v_3^n = 0$, то

$$\left\langle (2v_1+v_3)^n, [V]\right\rangle = \frac{(2n-1)^n-1}{n-1}.$$

В итоге:

$$s_{n-1}(N) = 2((n-1)^{n-1}+n) + (1+(-1)^n)(n-1)^{n-2} - \frac{(2n-1)^n-1}{n-1}. \qquad \square$$

Нетрудно проверить, что в размерностях 4 и 5 модуль s_n достигает максимального значения на указанном многограннике. Это наблюдение позволяет предположить, что соответствующая формула задаёт точную верхнюю оценку для s-чисел гиперповерхностей Калаби–Яу в гладких торических многообразиях Фано. Задача отыскания нижней оценки для s-чисел в настоящее время остаётся открытым и продолжает изучаться автором.

4.1. **Образующие градуированных компонент.** Применяя теоремы 2.2, 2.3 и 2.4, можно получить явный вид градуированных компонент:

$$
\begin{aligned}
\Omega^{SU}_0 &= \mathbb{Z},\\
\Omega^{SU}_1 &= \mathbb{Z}_2\langle\theta\rangle,\\
\Omega^{SU}_2 &= \mathbb{Z}_2\langle\theta^2\rangle,\\
\Omega^{SU}_4 &= \mathbb{Z}\langle y_2\rangle, \qquad y_2 = 2x_1^2,\\
\Omega^{SU}_6 &= \mathbb{Z}\langle y_3\rangle, \qquad y_3 = x_3,\\
\Omega^{SU}_8 &= \mathbb{Z}\langle \tfrac{1}{4}y_2^2,\, y_4\rangle, \qquad y_4 = 2x_4 - x_1x_3,\\
\Omega^{SU}_9 &= \mathbb{Z}_2\langle\theta x_1^4\rangle,\\
\Omega^{SU}_{10} &= \mathbb{Z}\langle \tfrac{1}{2}y_2y_3,\, y_5\rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle\theta^2x_1^4\rangle, \qquad y_5 = x_5.
\end{aligned}
$$

Исследуем возможность выражения образующих градуированных компонент.

Утверждение 4.4 ([5, p. 162]). $\frac{1}{4}y_2^2$ *не может быть представлен линейной комбинацией гиперповерхностей Калаби-Яу в гладких многообразиях Фано.*

Это следует из того, что род Тодда элемента $\frac{1}{4}y_2^2$ равен единице, тогда как для подмногообразий Калаби–Яу он всегда равен нулю или двум вследствие зеркальной симметрии чисел Ходжа. Таким образом, род Тодда любой линейной комбинации гиперповерхностей Калаби–Яу является чётным числом и не может равняться единице. Однако для элемента $\frac{1}{2}y_2y_3$ род Тодда равен нулю, и потому указанное препятствие в данном случае отсутствует.

Попробуем представить класс $\frac{1}{2}y_2y_3$ в виде линейной комбинации гиперповерхностей Калаби–Яу вида N_ω. Для этого достаточно подобрать такую линейную комбинацию, которая реализует необходимые s-числа. Поскольку $c_1 = 0$, среди характеристических чисел алгебраически независимыми остаются только два – например, s_5 и $s_{2,3}$.

Докажем вспомогательные леммы, необходимые для вычисления $s_{2,3}$.

Лемма 4.5. *Пусть ν – расслоение ранга 1. Тогда $s_{i_1,\dots,i_k}(\nu) = 0$ при $k > 1$, и $s_i(\nu) = s_1^i(\nu)$*

Доказательство. Так как ν ранга 1, то $c_j(\nu) = 0$ при $j > 1$
$s_i(\nu) = c_1^i(\nu) +$ (мономы в которых присутствуют $c_j, j > 1$) $= c_1^i(\nu) + 0$
Если индексов больше одного, то в выражение $s_{i_1,\dots,i_k}(\nu)$ не может входить слагаемое $c_1^{i_1+\dots+i_k}(\nu)$ без множителя $c_j(\nu), j > 1$, так как тогда мономы $x_1^{i_1+\dots+i_k} + \dots$ не сократятся. □

Лемма 4.6. *Характеристический класс $s_{i_1,\dots,i_k}(\mathscr{T}N)$ можно выразить через характеристические s-классы $\mathscr{T}V$ по следующей формуле:*

$$s_{i_1,\dots,i_k}(\mathscr{T}N) = s_{i_1,\dots,i_k}(\mathscr{T}V) - \sum_{j=1}^{k} s_{i_1,\dots,\hat{i_j},\dots,i_k}(\mathscr{T}N) \cdot s_1^{i_j}(\mathscr{T}V).$$

Пусть мы получаем выражение $s_{i_1,\dots,i_k}(\mathscr{T}N) = f_s(\mathscr{T}V)$, где под f_s понимается многочлен от некоторых s-классов. Тогда $s_{i_1,\dots,i_k}(N)$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}\left\langle s_{i_1,\dots,i_k}(\mathscr{T}N), [N]\right\rangle &= \left\langle f_s(\mathscr{T}V), [N]\right\rangle \\ &= \left\langle c_1(\mathscr{T}V) \cdot f_s(\mathscr{T}V), [V]\right\rangle = \left\langle (s_1 \cdot f_s)(\mathscr{T}V), [V]\right\rangle.\end{aligned}$$

Доказательство. Так как $\mathscr{T}N \oplus \nu \cong \mathscr{T}V$, по свойствам s-чисел имеем:

$$s_{i_1,\dots,i_k}(\mathscr{T}V) = \sum_{I\cdot J=(i_1,\dots,i_k)} s_I(\mathscr{T}N) \cdot s_J(\nu).$$

В силу предыдущей леммы $s_J(\nu) = 0$, если в J более одного индекса. Значит:

$$s_{i_1,\dots,i_k}(\mathscr{T}V) = s_{i_1,\dots,i_k}(\mathscr{T}N) + \sum_{j=1}^{k} s_{i_1,\dots,\hat{i_j},\dots,i_k}(\mathscr{T}N) \cdot s_{i_j}(\nu).$$

$\square$

Перейдем к утверждению.

Утверждение 4.7. *Класс $\frac{1}{2}y_2y_3$ представим линейной комбинацией гиперповерхностей Калаби–Яу в произведениях проективных пространств. В частности, имеет место следующее представление:*

$$\frac{1}{2}y_2y_3 = 67467\, N_6 - 77109\, N_{5,1} - 43911\, N_{3,3} + 10\, N_{2,2,2} + 61994\, N_{1,1,1,1,1,1}.$$

Доказательство. Рассчитаем необходимые характеристические числа.

Вычисление $s_5(N)$ осуществляется согласно лемме 2.7. Для вычисления $s_{2,3}(N)$ воспользуемся леммой 4.6, которая даёт следующее выражение:

$$\begin{aligned}s_{2,3}(N) &= \left\langle s_{2,3}(\mathscr{T}N), [N]\right\rangle \\ &= \left\langle s_{2,3}(\mathscr{T}V) - s_1^2(\mathscr{T}V) \cdot s_3(\mathscr{T}N) - s_1^3(\mathscr{T}V) \cdot s_2(\mathscr{T}N),\ [N]\right\rangle.\end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что:

$$s_3(\mathscr{T}N) = s_3(\mathscr{T}V) - s_3(\nu) = (s_3 - s_1^3)(\mathscr{T}V),$$

$$s_2(\mathscr{T}N) = s_2(\mathscr{T}V) - s_2(\nu) = (s_2 - s_1^2)(\mathscr{T}V).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} s_{2,3}(N) &= \left\langle \left(s_{2,3} - s_1^2 s_3 + s_1^5 - s_1^3 s_2 + s_1^5\right)(\mathscr{T}V), [N] \right\rangle \\ &= \left\langle s_1 \left(s_{2,3} - s_1^2 s_3 - s_1^3 s_2 + 2 s_1^5\right)(\mathscr{T}V), [V] \right\rangle \\ &= \left\langle \left(s_1 s_{2,3} - s_1^3 s_3 - s_1^4 s_2 + 2 s_1^6\right)(\mathscr{T}V), [V] \right\rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим многообразия N_6, $N_{5,1}$, $N_{3,3}$, $N_{2,2,2}$ и $N_{1,1,1,1,1,1}$. Их s-числа сведены в таблицу:

	N_6	$N_{5,1}$	$N_{3,3}$	$N_{2,2,2}$	$N_{1,1,1,1,1,1}$
s_5	-117600	-93300	-81920	-65610	-46080
$s_{2,3}$	216384	175020	155264	126846	92160

Заметим, что:

$$s_5\left(\tfrac{1}{2}y_2y_3\right) = 0, \quad s_{2,3}\left(\tfrac{1}{2}y_2y_3\right) = \tfrac{1}{2}s_2(y_2)s_3(y_3) = \tfrac{1}{2}\cdot(-48)\cdot 6 = -144.$$

Таким образом, линейная комбинация

$$67467N_6 - 77109N_{5,1} - 43911N_{3,3} + 10N_{2,2,2} + 61994N_{1,1,1,1,1,1}$$

представляет класс $\frac{1}{2}y_2y_3$.

$\square$

В связи с этим можно поставить задачи, связанные с обобщением последних результатов, которые являются объектом дальнейших исследований автора.

Задача 4.8. *Какие классы SU бордизма выражаются линейными комбинациями N_ω? В частности, какие порождающие градуированных компонент Ω^{SU} выражаются линейными комбинациями?*

Задача 4.9. *Найти (точные) верхние и нижние оценки для характеристических чисел подмногообразий Калаби-Яу в гладких многообразиях Фано*

Список литературы

[1] С. П. Новиков, “Гомотопические свойства комплексов Тома”, *Матем. сб.*, **57**(99):4 (1962), 407–442. [Online]. Available: https://www.mathnet.ru/rus/sm4658

[2] Z. Lü, T. Panov, “On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings”, *Algebr. Geom. Topol.*, **16**:5 (2016), 2865–2893. [Online]. Available: https://doi.org/10.2140/agt.2016.16.2865

[3] V. V. Batyrev, “Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi–Yau Hypersurfaces in Toric Varieties”, arXiv:alg-geom/9310003 (1993). [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/alg-geom/9310003

[4] И. Ю. Лимонченко, Ж. Лю, Т. Е. Панов, “Гиперповерхности Калаби–Яу и SU-бордизмы”, *Топология и физика*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, *Труды МИАН*, **302**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2018, 287–295; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **302** (2018), 270–278. [Online]. Available: https://www.mathnet.ru/rus/tm3922

[5] И. Ю. Лимонченко, Т. Е. Панов, Г. С. Черных, “SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители”, *УМН*, **74**:3(447) (2019), 95–166; *Russian Math. Surveys*, **74**:3 (2019), 461–524. [Online]. Available: https://www.mathnet.ru/rus/rm9883

[6] Дж. Милнор, Дж. Сташефф, *Характеристические классы, с приложением работы Дж. Манкрса “Элементарная дифференциальная топология”*. М.: Мир, 1979.

[7] M. Kreuzer, B. Nill, “Classification of toric Fano 5-folds”, arXiv:math/0702890 (2007). [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/math/0702890

[8] M. Kreuzer, H. Skarke, “Complete classification of reflexive polyhedra in four dimensions”, arXiv:hep-th/0002240 (2000). [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/hep-th/0002240

[9] H. M. Kreuzer, “Calabi–Yau data”. [Online]. Available: http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/CY/

Email address: gregory.korukin@math.msu.ru