Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Представимость неразложимых элементов в кольце SU-бордизмов гиперповерхностями Калаби-Яу в торических многообразиях Фано

группа 503

Корюкин Григорий

научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор

Тарас Евгеньевич Панов

Введение

SU-бордизмы - обобщенная теория гомологий на SU-многообразиях (со специальной унитарной структурой в стабильно касательном расслоении). Доказано, что кольцо кобордизмов Ω^{SU} имеет вид 1. Образующие этого кольца - классы SU-бордизма некоторых многообразий. Хочется иметь геометрические представители этих классов. В комплексных размерностях больше 5, эти образующие можно получить с помощью квазиторических многообразий, однако в меньшей размерности все квазиторические многообразия бордантны нулю. Поэтому для описания всех образующих одним семейством многообразий квазиторические не подходят.

В прошлой курсовой работе (I) было получено предложение 1, из которого следует, что многообразия Калаби-Яу полученные как гиперповерхности в $\mathbb{C}P^{\omega}$ не могут представлять неразложимые элементы образующих в кольце Ω^{SU}. В данной курсовой (II) будут рассматриваться 3-мерные гиперповерхности Калаби-Яу в произвольных 4-мерных гладких многообразиях Фано, не обязательно явлющимися произведениями комплексных проективных пространств. Будут посчитаны s-числа для всех 124 подмногообразий Калаби-Яу в гладких 4-мерных многообразиях Фано и доказано предложение 2. В качестве приложения приведена таблица, содержащая многие необходимые сведения о 4-мерных многогоранниках Фано, из которых и получаются 4-мерные гладкие многообразия Фано. В частности там можно найти координаты вершин этих многогранников в формате базы данных [4], числа Милнора и Ходжа для соответствующих гиперповерхностей Калаби-Яу.

I

Структура Ω^{SU}

Первым структурным результатом о кольце Ω^{SU} была теорема С.П. Новикова 1962 г., показывающая, что Ω^{SU} становится полиномиальным кольцом после обращения двойки (хотя само Ω^{SU} не является полиномиальным даже по модулю кручения). Класс бордизмов $[M^{2i}] \in \Omega^{U}_{2i}$ является полиномиальной образующей в Ω^{U} тогда и только тогда, когда

$$s_i\left[M^{2i}\right] = \pm m_i$$

Более сложные условия делимости на s_i-число позволяют определить и полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$.

Теорема 1 (С.П. Новиков [1, Теорема 2.1]). $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ *представляет собой полиномиальное кольцо с одной образующей в каждой четной размерности* ≥ 4 *:*

$$\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][y_i : i \geq 2], \quad \deg y_i = 2i.$$

Класс бордизмов SU-многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной образующей y_i тогда и только тогда, когда

$$s_i\left[M^{2i}\right] = \pm m_i m_{i-1} \quad \text{с точностью до степени двойки.}$$

Для каждого целого числа $n \geq 3$ обозначим

$$g(n) = \begin{cases} 2m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n > 3 \text{ нечетно;} \\ m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n > 3 \text{ четно;} \\ -48, & \text{если } n = 3 \end{cases} \tag{1}$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *[1, Теорема 7.1] Существуют неразложимые элементы $y_i \in \Omega_{2i}^{SU}$, $i \leq 2$ с минимальными s-числами $s_i(y_i) = g(i+1)$.*

Конструкция Батырева

Мы называем компактное кэлерово многообразие M с $c_1(M) = 0$ многообразием Калаби-Яу. По определению многообразие Калаби-Яу является SU-многообразием.

Дальше в тексте торические многообразия являются полными и неособыми, если не оговорено противное. Стандартная комплексная структура на торическом многообразии не может быть SU-структурой, поэтому среди торических многообразий нет многообразий Калаби-Яу. Однако следующая конструкция дает гиперповерхности Калаби-Яу в торических Горенштейновых многообразиях Фано [2].

Конструкция 1 (В.В. Батырев [1, Конструкция 11.1])**.** Торическое многообразие V называется многообразием Фано, если его антиканонический класс $D_1 + \cdots + D_m$ (представляющий $c_1(V)$) является очень обильным. В геометрических терминах, проективное вложение $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, отвечающее дивизору $D_1 + \cdots + D_m$, приходит из целочисленного многогранника P, в котором расстояние по решетке от 0 до каждой гиперплоскости, содержащей гипергрань, равно 1. Такой многогранник P называется рефлексивным; его двойственный многогранник P^* также является целочисленным.

Подмногообразие N, двойственное к первому классу Чженя $c_1(V)$ (см. конструкцию 6.1), задается как гиперплоское сечение вложения $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, определяемого дивизором $D_1 + \cdots + D_m$. Поэтому $N \subset V$ является гладкой алгебраической гиперповерхностью в V, так что N - многообразие Калаби-Яу комплексной размерности $n-1$.

Таким образом, по любому торическому многообразию Фано V размерности n (или, эквивалентно, по любому неособому рефлексивному n-мерному многограннику P) можно построить каноническое $(n-1)$-мерное многообразие Калаби-Яу N_P.

Леммы для вычислений

Характеристические s-числа многообразий Калаби–Яу $N = N_P$ задаются следующим образом.

Лемма 1. *[1, Лемма 11.2] Имеет место формула:*

$$s_{n-1}(N) = \left\langle (v_1 + \cdots + v_m)\left(v_1^{n-1} + \cdots + v_m^{n-1}\right) - (v_1 + \cdots + v_m)^n, [V] \right\rangle.$$

Доказательство. Воспользуемся изоморфизмом комплексных векторных расслоений $\mathscr{T}N \oplus \nu \cong i^* \mathscr{T}V$, где ν - нормальное расслоение вложения $i : N \hookrightarrow V$. Поэтому $s_{n-1}(\mathscr{T}N) + s_{n-1}(\nu) = i^* s_{n-1}(\mathscr{T}V)$, и мы получаем

$$\begin{aligned}\langle s_{n-1}(\mathscr{T}N), [N]\rangle &= \langle -s_{n-1}(\nu) + i^* s_{n-1}(\mathscr{T}V), [N]\rangle \\ &= \left\langle c_1(\mathscr{T}V)\left(-c_1^{n-1}(\mathscr{T}V) + s_{n-1}(\mathscr{T}V)\right), [V]\right\rangle \\ &= \langle c_1(\mathscr{T}V) s_{n-1}(\mathscr{T}V) - c_1^n(\mathscr{T}V), [V]\rangle .\end{aligned}$$

□

Обозначим через $\omega = (i_1, \dots, i_k)$ неупорядоченное разбиение числа n в сумму k положительных целых чисел, т.е. $i_1 + \dots + i_k = n$. Пусть Δ^i- стандартный рефлексивный симплекс размерности i. Тогда $P_\omega = \Delta^{i_1} \times \dots \times \Delta^{i_k}$ есть рефлексивный многогранник, соответствующий торическому многообразию Фано $\mathbb{C}P^\omega = \mathbb{C}P^{i_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{i_k}$. Обозначим через N_ω гиперповерхность Калаби-Яу в $\mathbb{C}P^\omega$, получаемую применением конструкции Батырева.

Пусть $\widehat{P}(n)-$ множество всех разбиений ω числа n на слагаемые, не превосходящие $n-2$. Таким образом,

$$\widehat{P}(n) = \{\omega = (i_1, \dots, i_k) : i_1 + \dots + i_k = n, \omega \neq (n), (1, n-1)\} .$$

Для каждого $\omega = (i_1, \dots, i_k)$ определен мультиномиальный коэффициент $C_n^\omega = \frac{n!}{i_1! \cdots i_k!}$. Положим

$$\alpha(\omega) = C_n^\omega \, (i_1+1)^{i_1} \cdots (i_k+1)^{i_k} . \tag{2}$$

Лемма 2. *[1, Лемма 12.1] Для любого $\omega \in \widehat{P}(n)$ имеет место равенство*

$$s_{n-1}(N_\omega) = -\alpha(\omega).$$

Доказательство. Кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P^\omega = \mathbb{C}P^{i_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{i_k}$ задается изоморфизмом

$$H^*(\mathbb{C}P^\omega; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u_1, \dots, u_k] / \left(u_1^{i_1+1}, \dots, u_k^{i_k+1}\right),$$

где

$$\begin{gathered} u_1 := v_1 = \dots = v_{i_1+1}, \quad u_2 := v_{i_1+2} = \dots = v_{i_1+i_2+2}, \quad \cdots, \\ u_k := v_{i_1+\dots+i_{k-1}+k} = \dots = v_{i_1+\dots+i_k+k} = v_m. \end{gathered}$$

Поскольку $\omega \in \widehat{P}(n)$, мы имеем $v_i^{n-1} = 0$ в кольце $H^*(\mathbb{C}P^\omega; \mathbb{Z})$ для любого i. Формула из леммы 11.2 дает

$$\begin{aligned} s_{n-1}(N_\omega) = &- \langle (v_1 + \dots + v_m)^n, [\mathbb{C}P^\omega]\rangle = \\ &= - \langle ((i_1+1)\, u_1 + \dots + (i_k+1)\, u_k)^n, [\mathbb{C}P^\omega]\rangle . \end{aligned}$$

Значение на фундаментальном классе $[\mathbb{C}P^\omega]$ равно коэффициенту при мономе $u_1^{i_1} \cdots u_k^{i_k}$, откуда следует утверждение леммы. □

Образующие Калаби-Яу маломерные

Для $i \geq 5$ каждая образующая $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$ может быть задана квазиторическим многообразием. С другой стороны, каждое квазиторическое SU-многообразие вещественной размерности ≤ 8 бордантно нулю.

Однако конструкция Батырева позволяет найти геометрические представителей Калаби-Яу для образующих y_i кольца SU-бордизмов в комплексной размерности $i \leq 4$.

Имеют место соотношения

$$\Omega_4^{SU} = \mathbb{Z}\left\langle y_2 \right\rangle, \quad \Omega_6^{SU} = \mathbb{Z}\left\langle y_3 \right\rangle, \quad \Omega_8^{SU} = \mathbb{Z}\left\langle \frac{1}{4}y_2^2, y_4 \right\rangle$$

где значения s-чисел образующих задаются формулами

$$s_2\left(y_2\right) = -48, \quad s_3\left(y_3\right) = m_3 m_2 = 6, \quad s_4\left(y_4\right) = 2m_4 m_3 = 20$$

Попробуем найти какую-то линейную комбинацию подмногообразий Калаби-Яу, которые будут представлять y_2, y_3, y_4.
Пользуясь леммой 2 найдем:

$$s_3(N_{(2,2)}) = -\alpha(2,2) = -C_4^{(2,2)}(2+1)^2(2+1)^2 = -\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 81 = -486$$

$$s_3(N_{(1,1,1,1)}) = -\alpha(1,1,1,1) = -C_4^{(1,1,1,1)}(1+1)^1(1+1)^1(1+1)^1(1+1)^1 = \\ = -\frac{4!}{1!\cdot \ldots \cdot 1!}\cdot 2^4 = -384$$

А значит

$$s_3(15\cdot N_{(2,2)} - 19\cdot N_{(1,1,1,1)}) = 15\cdot(-486) - 19\cdot(-384) = -7290 + 7296 = 6$$

Получим, что $15N_{(2,2)} - 19N_{(1,1,1,1)}$ предсталяет y_3, т.к.

$$s_3(y_3) = 6 = s_3(15N_{(2,2)} - 19N_{(1,1,1,1)})$$

Абсолютно также поступим для y_4

$$N_{(1,1,3)} = -\alpha(1,1,3) = -C_5^{(1,1,3)}(1+1)^1(1+1)^1(3+1)^3 = -\frac{5!}{3!}\cdot 4\cdot 64 = -5120$$

$$N_{(1,2,2)} = -\alpha(1,2,2) = -C_5^{(1,2,2)}(1+1)^1(2+1)^2(2+1)^2 = \\ = -\frac{5!}{2!\cdot 2!}\cdot 2\cdot 81 = -4860$$

$$s_4(56N_{(1,1,3)} - 59N_{(1,2,2)}) = -56\cdot 5120 + 59\cdot 4860 = -286\ 720 + 286\ 740 = 20$$

А значит $56N_{(1,1,3)} - 59N_{(1,2,2)}$ предсталяет класс y_4

$$s_4(y_4) = 20 = s_4(56N_{(1,1,3)} - 59N_{(1,2,2)})$$

Для y_2 же можно в качестве представляющих выбрать $N_{(3)}$ или $N_{(1,1,1)}$, для них выполнено $s_2(N_{(3)}) = s_2(N_{(1,1,1)}) = s_2(y_2) = -48$

Старшие размерности

В малых размерностях мы нашли какие-то линейные комбинации подмногообразий Калаби-Яу, которые представляют неразложимые элементы класса образующих кольца $y_i \in \Omega_{2i}^{SU}$ для $i \leq 4$. На самом деле, то же верно и для $i \geq 5$, для этого над потребуется следующая

Лемма 3. *[1, Лемма 12.2], При $n \geq 3$ имеет место соотношение*

$$\text{н.о.д. } \alpha(\omega) = g(n), \quad \omega \in \widehat{P}(n)$$

Теорема 3. *[1, Теорема 12.3] Классы SU-бордизмов гиперповерхностей Калаби-Яу N_ω в торических многообразиях $\mathbb{C}P^{i_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{i_k}$ с $\omega \in \widehat{P}(n), n \geq 3$, мультипликативно порождают кольцо SU- бордизмов $\Omega^{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$.*

Доказательство. Для любого $n \geq 3$ леммы 2 и 3 дают нам линейную комбинацию классов бордизмов $[N_\omega] \in \Omega_{2n}^{SU}$, характеристическое s-число которой равно $g(n+1)$. Такая линейная комбинация дает полиномиальную образующую y_n в кольце $\Omega^{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$, описанную в теореме 2. □

На самом деле мы доказали целочисленный результат: элементы $y_i \in \Omega^{SU}$, описанные в теореме 2, могут быть представлены целочисленными линейными комбинациями классов бордизмов многообразий Калаби-Яу N_ω. Элемент y_i является частью базиса абелевой группы Ω_{2i}^{SU}. Возникает следующий вопрос:

Какие классы бордизмов из Ω^{SU} могут быть представлены многообразиями Калаби-Яу?

Этот вопрос является SU-аналогом следующей хорошо известной проблемы Хирцебруха: какие классы бордизмов в Ω^U содержат связные (т. е. неприводимые) неособые алгебраические многообразия? Если опустить условие связности, то всякий класс U-бордизма положительной размерности представим алгебраическим многообразием. Для SU-бордизмов ситуация значительно сложнее.

Представимость образующих с помощью N_ω в старших размерностях

В комплексной размерности 2 мы имеем $s_2(N_{(1,1,1)}) = s_2(i_2) = g(3) = -48$, то есть неразложимый представитель класса SU бордизма образующей кольца представляется гиперповерхностью Калаби-Яу указанного вида (N_ω). Непосредственный подсчет указывает, что в размерностях 3 и 4 неразложимые представители не могут быть полученны из данной конструкции. Представимы ли неразложимые представители классов образующих кольца Ω_{2i}^{SU} с помощью N_ω? Ответ на этот вопрос даёт

Предложение 1. *Подмногообразие Калаби-Яу вида $N_{(\omega)}$ не может представлять неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}$ из теоремы 2 в комплексных размерностях, больших двух.*

Доказательство. Для того, чтобы многообразие предсталяло y_i, необходимо чтобы выполнялось

$$s_{n-1}(N_\omega) = \pm g(n)$$

Оценим $g(n)$, который определяется по формуле 1 (При $n > 3$):

$$0 \le g(n) \le 2m_{n-1}m_{n-2} \le 2n(n-1), \qquad \text{т.к. } m_i \le i+1$$

Для всех $\omega \in \widehat{P}(n)$ верна лемма 2. Рассмотрим для начала два оставшихся случая $\omega = (n)$ и $\omega = (1, n-1)$, найдем их s-числа:

$$s_{n-1}(N_{(n)}) = \left\langle (n+1)u \cdot (n+1)u^{n-1} - ((n+1)u)^n , [V] \right\rangle = (n+1)^2 - (n+1)^n$$

$$s_{n-1}(N_{(1,n-1)}) = \left\langle (2u_1 + nu_2)\left(2u_1^{n-1} + nu_2^{n-1}\right) - (2u_1+nu_2)^n , [V] \right\rangle =$$
$$\left\langle \left(2nu_1u_2^{n-1} - C_n^{1,n-1} 2u_1 (nu_2)^{n-1} + \text{ (..мономы не } u_1u_2^{n-1}\text{..)}\right) \right\rangle = 2n - 2n^n$$

То есть

$$\left|s_{n-1}(N_{(n)})\right| = (n+1)^n - (n+1)^2 \qquad \left|s_{n-1}(N_{(1,n-1)})\right| = 2n^n - 2n$$

$$\left|s_{n-1}(N_{(n)})\right| - |g(n)| = (n+1)^n - (n+1)^2 - 2n(n-1) =$$
$$= (n+1)^n - n^2 - 2n - 1 - 2n^2 + 2n = (n+1)^n - 3n^2 - 1 > 0, \text{ при } n > 3$$

То есть $|g(n)| < \left|s_{n-1}(N_{(n)})\right|$.

$$\left|s_{n-1}(N_{(1,n-1)})\right| - |g(n)| = 2n^n - 2n - 2n(n-1) = 2n^n - 2n^2 > 0, \text{ при } n > 3$$

То есть $|g(n)| < \left|s_{n-1}(N_{(1,n-1)})\right|$.

И для них утверждение верно. Рассмотрим $\omega \in \widehat{P}(n)$:

В силу леммы 2 и формулы 2:

$$s_{n-1}(N_\omega) = -\alpha(\omega) = -C_n^{(i_1,\dots,i_k)}(i_1+1)^{i_1} + \dots + (i_k+1)^{i_k}$$

Так как $(i+j)! \ge i!j!$ (следует из целочисленности C_{i+j}^i), то

$$C_n^{(i_1,\cdots,i_p,\cdots,i_q,\cdots,i_k)} \ge C_n^{(i_1,\cdots,i_p+i_q,\cdots,\widehat{i_q},\cdots,i_k)}$$

$$C_n^{(i_1,\dots,i_k)} \geq C_n^{(a,b)} \geq C_n^{(2,n-2)} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

,

(a, b - какие-то суммы чисел из разбиения, в частности $a + b = n$)

$k \geq 2$, а значит $(i_1+1)^{i_1} + \dots + (i_k+1)^{i_k} > 2 \cdot 2$

$$\begin{aligned} |s_{n-1}(N_\omega)| = \alpha(\omega) = & C_n^{(i_1,\dots,i_k)}(i_1+1)^{i_1} + \dots + (i_k+1)^{i_k} > \\ & > C_n^{(2,n-2)} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2n(n-1) \geq g(n) \end{aligned}$$

А значит для всех разбиений ω при $n > 3$

$$|g(n)| < \left|s_{n-1}(N_{(n)})\right|$$

И только при $n = 3$ имеем $s_2(N_{(3)}) = s_2(N_{(1,1,1)}) = -48 = g(3)$. □

II

Представимость образующих с помощью N в комплексной размерности 3

Так как среди подмногообразий Калаби-Яу из класса N_ω нет представителей образующих в комплексных размерностях больших двух, то попробуем найти образующие в малых размерностях, но среди более широкого класса подмногообразий Калаби-Яу.

3-мерные подмногообразия Калаби-Яу в гладких 4-мерных многообразиях Фано

Гладкие многообразия Фано X_{Q° возникают из многогранников Фано Q, т.е. рефлексивный многогранник решетки, содержащий 0 как внутреннюю точку, и обладающий тем свойством, что вершины любой его гиперграни образуют базис решетки. [3, Exercise 8.3.6]. Нормальный веер X_{Q° получается из конусов над гранями Q.

База данных [4] содержит информацию о координатах вершин всех 124 рефлексивных многогранниках в размерности 4. Они заданны в виде столбцов матрицы. Для примера будем показывать как все рассчеты на 115ом многограннике:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть вершины этого многогранника $(1,0,0,0)$,$(0,1,0,0)$,$(0,0,1,0)$ и тд. Для того чтобы найти число Милнора по лемме 1, нам нужно найти кольцо когомологий соответствующего многообразия Фано. Воспользуемся

Теорема 4 (теорема Данилова-Юркевича)**.** *Пусть V - неособое торическое многообразие комплексной размерности n с полным неособым веером Σ. Тогда кольцо когомологий $H^*(V;\mathbb{Z})$ порождено двумерными классами v_i, двойственными к инвариантным подмногообразиям D_i, и имеет место изоморфизм*

$$H^*(V;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\left[v_0,\ldots,v_{m-1}\right]/\mathscr{I}, \quad \deg v_i = 2$$

где $\mathscr{I}$ - идеал, порожденный элементами следующих двух типов:

(a) $v_{i_1}\cdots v_{i_k}$ такие, что $a_{i_1},\ldots,a_{i_k}$ не порождают конуса из Σ;

(b) $\sum_{i=0}^{m-1}\langle a_i,x\rangle v_i$, для любого вектора $x\in\mathbb{Z}^n$.

Так как вершины многогранника Q являются концами нормальных векторов к гиперграням Q°, то соотношения типа (b) теоремы 4 порождены n линейными формами $a_{j1}v_0+\cdots+a_{jm}v_{m-1}$, соответствующими строкам матрицы. В нашем случае это будут соотношения $v_0+v_4-v_5-v_9$, $v_1+v_4-v_5-v_8$, $v_2-v_4+v_5-v_7$, и $v_3-v_4+v_5-v_6$. Соотношения типа (a) можно уже нельзя получать явно, однако существует несколько способов это сделать, используя специализированные пакеты.

Соотношения типа (a) через sage

Для этой реализации потребуется функция primitive collections, которая по заданному вееру возвращает вершины, которые не образуют конус.

```
points = [[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1],[1,1,-1,-1],
[-1,-1,1,1],[0,0,0,-1],[0,0,-1,0],[0,-1,0,0],[-1,0,0,0]]
p = LatticePolytope(points)
fp = FaceFan(p)
fp.primitive_collections()
```

Для данного запроса получим результат

```
[frozenset({1, 8}),
 frozenset({2, 7}),
 frozenset({4, 5}),
 frozenset({0, 9}),
 frozenset({3, 6}),
 frozenset({0, 1, 5}),
 frozenset({1, 5, 6}),
 frozenset({1, 5, 7}),
 frozenset({2, 3, 9}),
 frozenset({2, 4, 9}),
 frozenset({2, 8, 9}),
 frozenset({2, 3, 8}),
 frozenset({2, 4, 8}),
 frozenset({0, 5, 6}),
```

```
 frozenset({5, 6, 7}),
 frozenset({3, 8, 9}),
 frozenset({4, 8, 9}),
 frozenset({0, 6, 7}),
 frozenset({1, 6, 7}),
 frozenset({0, 5, 7}),
 frozenset({3, 4, 8}),
 frozenset({3, 4, 9}),
 frozenset({0, 1, 7}),
 frozenset({2, 3, 4}),
 frozenset({0, 1, 6})]
```

Т.е. образующие типа (a) имеют вид $v_1 v_8, v_2 v_7$ и тд.

Соотношения типа (a) через polymake

Аналогичные рассчеты можно провести и с помощью варианта теоремы 4 [1, Теорема 8.6] в которой соотношения типа (a) задаются так:

(a) $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ такие, что $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} = \varnothing$ в P,
где F_j грани Q°, нормальные к векторам a_j

Тогда нам достаточно найти минимальные наборы $F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$ которые не пересекаются в P. Такой встроенной функции нет. Однако можно рассмотреть какие грани присутствуют в Q, и если грань $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ есть в Q, то тогда $F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$ пересекаются. Чтобы найти какие $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ являются гранями в Q можно использовать следующий код:

```
$p115= new Polytope(POINTS=>[[1, 1,0,0,0],[1, 0,1,0,0],[1, 0,0,1,0],[1,
    0,0,0,1],[1, 1,1,-1,-1],[1, -1,-1,1,1],[1, 0,0,0,-1],[1, 0,0,-1,0],[1,
    0,-1,0,0],[1, -1,0,0,0]]);
$HD115 = $p115->HASSE_DIAGRAM;
print $HD115->FACES;
```

(заметим, что координаты точки задаются в однородных координатах, поэтому к исходным добавили 1 в начале). Получим:

```
{}
{0}
{1}
...
{9}
{0 1}
{0 2}
...
{7 8}
{7 9}
{8 9}
{0 1 2}
...
{6 7 8}
{6 7 9}
{6 8 9}
{7 8 9}
```

```
{1 2 5 9}
{2 5 6 8}
{6 7 8 9}
...
{1 4 6 9}
{0 1 3 4}
{0 1 2 3 4 5 6 7 8 9}
```

Тогда остается взять дополнения до полученных множеств, и найти среди них минимальные. Для этого действия лучше всего написать программу, так как с ростом числа вершин многогранника количество возможных подмножеств удваивается.

Найти соотношения типа (a) можно было найти и из [5], однако на данный момент данная база данных недоступна.

Кольцо когомологий

Теперь когда мы располагаем всеми соотношениями можем выписать идеал:

$$\begin{gathered}\mathscr{I} = (v_0 + v_4 - v_5 - v_9,\ \ v_1 + v_4 - v_5 - v_8,\ \ v_2 - v_4 + v_5 - v_7,\ \ v_3 - v_4 + v_5 - v_6,\ \ v_1v_8, \\ v_2v_7,\ \ v_4v_5,\ \ v_0v_9,\ \ v_3v_6,\ \ v_0v_1v_5,\ \ v_1v_5v_6,\ \ v_1v_5v_7, \\ v_2v_3v_9,\ \ v_2v_4v_9,\ \ v_2v_8v_9,\ \ v_2v_3v_8,\ \ v_2v_4v_8,\ \ v_0v_5v_6,\ \ v_5v_6v_7,\ \ v_3v_8v_9, \\ v_4v_8v_9,\ \ v_0v_6v_7,\ \ v_1v_6v_7,\ \ v_0v_5v_7,\ \ v_3v_4v_8,\ \ v_3v_4v_9,\ \ v_0v_1v_7,\ \ v_2v_3v_4,\ \ v_0v_1v_6)\end{gathered}$$

Чтобы найти s-число N необходимо найти вид элемента

$$(v_1 + \cdots + v_m)\left(v_1^{n-1} + \cdots + v_m^{n-1}\right) - (v_1 + \cdots + v_m)^n$$

в кольце. Для этого воспользуемся пакетом Macaulay2. Вот необходимый код:

```
R115=QQ[v0,v1,v2,v3,v4,v5,v6,v7,v8,v9]
P115 = (v0 + v1 + v2 + v3 + v4 + v5 + v6 + v7 + v8 + v9)*(v0^3 + v1^3 + v2^3 +
    v3^3 + v4^3 + v5^3 + v6^3 + v7^3 + v8^3 + v9^3) - (v0 + v1 + v2 + v3 + v4 + v5
    + v6 + v7 + v8 + v9)^4
I115=ideal( v0 + v4 - v5 - v9, v1 + v4 - v5 - v8, v2 - v4 + v5 - v7, v3 - v4 + v5
    - v6, v0*v9, v8*v1, v2*v7, v3*v6, v4*v5, v0*v1*v5, v0*v1*v6, v0*v1*v7,
    v0*v5*v6, v0*v5*v7, v0*v6*v7, v1*v5*v6, v1*v5*v7, v1*v6*v7, v2*v3*v4, v8*v2*v3,
    v9*v2*v3, v8*v2*v4, v9*v2*v4, v8*v9*v2, v8*v3*v4, v9*v3*v4, v8*v9*v3, v8*v9*v4,
    v5*v6*v7 )
P115%I115
```

Получаем $-80v_9^4$.

Число Милнора будет равно коэфициенту при мономе, соответсвующем фундаментальному классу, т.е. коэффициенту при $v_{i_1}, \cdots, v_{i_n}$, если $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ порождают конус, или что то же $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n}$ (n - размерность многогранника). В нашем примере подходит $v_1v_2v_5v_9$, 1 2 5 9 присутствует в диаграмме Хассе, или потому что это множество из четырех вершин, которое не содержит ни одного из множеств из того что получили с помощью sage. Посмотрим как выглядит моном $v_1v_2v_5v_9$ в кольце:

```
FC115 = v1*v2*v5*v9
FC115%I115
```

Получаем $\frac{1}{3}v_9^4$.

Соответсвенно элемент $(v_1 + \cdots + v_m)\left(v_1^{n-1} + \cdots + v_m^{n-1}\right) - (v_1 + \cdots + v_m)^n$ имеет вид $-80v_9^4 = -80 \cdot 3v_1v_2v_5v_9 = -240v_1v_2v_5v_9$. Значит число Милнора подмногообразия Калаби-Яу в гладком многообразии Фано соответствующем 115ому многограннику равно -240. Таким образом можно посчитать все s-числа и выяснить, имеет ли какое-то подмногообразие Калаби-Яу в гладком многообрразии Фано s-число 6, что означало бы, что оно представляет y_3 в Ω^{SU}.

Все s-числа

Таким образом можно посчитать все s-числа. Все они по модулю не меньше 216, а значит ни одно подмногообразие Калаби-Яу не может задавать y_3. Таким образом доказана:

Предложение 2. *Подмногообразие Калаби-Яу в гладких 4-мерных многообразиях Фано не может представлять неразложимый элемент $y_3 \in \Omega^{SU}$ из теоремы 2.*

По аналогии с доказательством предложения 1 можно предположить, что s-число растет крайне быстро, и всегда будет превосходить $g(n+1)$.

Гипотеза 1. ***Подмногообразия Калаби-Яу в гладких многообразиях Фано не могут представлять неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}$ из теоремы 2 в комплексных размерностях, больших двух.***

Числа Ходжа

Так как $s_3 = c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3$, то для многообразий Калаби-Яу $s_3(N) = 3c_3(N)$, причем $c_3(N) = \chi(N)$. Значит поделив s_3 на три мы получим Эйлерову характеристику соответствующих многообразий Калаби-Яу. С помощью этой информации можно анализировать базу данных [6]. В приложении выписаны все 124 многогранника Фано, вместе с s-числом соответствующих подмногообразий и другими характеристиками из баз данных. В частности можно узнать числа Ходжа подмногообразий Калаби-Яу.

В частности интересно сопоставить полученный результат с работой Батырева [7]. Там приводится классификация гладких многообразий Фано, вместе с их числовыми характеристиками: произведениями характерестических классов $c_1^4, c_1^2c_2$, числами Бетти b_2, b_4, размерностями $h^0 = h^0(V, -K_V)$ и $a(V) := \dim \mathrm{Aut}(V)$. Эти числа связаны с числами Ходжа подмногообразий Калаби-Яу N в этих гладких многообразиях Фано V следующими формулами:

$$h^{2,1}(N) = h^0(V, -K_V) - a(V) - 1 = \frac{c_1^2c_2}{2} + b_4 - 3b_2 - 22,$$

где $h^0(V, -K_V) = 1 + \frac{1}{12}(c_1^2c_2 + 2c_1^4)$.

Сопоставляя с полученными нами числами Ходжа можно наткнутся на ошибки в таблице. Так, легко обнаружить несоответствие: в 24ой не совпадает число

Ходжа из-за ошибки в $b_4 = 4$ (должна быть 5), а в строчке 44 из $h^0 (V, -K_V) = 1 + \frac{1}{12} (c_1^2 c_2 + 2c_1^4)$ получается 86, а не 96. Также можно обнаружить, что какая-то строчка полностью неправильно, хотя не противоречит формулы внутри неё: подмногообразий Калаби-Яу с числом Ходжа 75 по рассчетам должно быть 7, а в таблице таких 8.

По вычислениям получилось 17 уникальных чисел Ходжа, которые не повторяются, их сразу можно сопоставить соответствующим многообразиям Фано, в которых они лежат.

Список литературы

[1] I. Y. Limonchenko, T. E. Panov, and G. S. Chernykh, "-bordism: structure results and geometric representatives," *Russian Mathematical Surveys*, vol. 74, no. 3, pp. 461–524, jun 2019. [Online]. Available: https://doi.org/10.1070%2Frm9883

[2] V. V. Batyrev, "Dual polyhedra and mirror symmetry for calabi-yau hypersurfaces in toric varieties." [Online]. Available: https://arxiv.org/pdf/alg-geom/9310003.pdf

[3] H. K. S. David A. Cox, John B. Little, *Toric Varieties*. Amer. Math. Soc.,, 2011, vol. 124. [Online]. Available: https://pi.math.cornell.edu/~tsh/cornell-only/cox-little-schenck-toric.pdf

[4] H. S. M. Kreuzer, "Toric fano polytopes." [Online]. Available: http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/CY/math/0702890/

[5] R. Altman, J. Gray, Y.-H. He, V. Jejjala, and B. D. Nelson, "A calabi-yau database: Threefolds constructed from the kreuzer-skarke list," 11 2014. [Online]. Available: https://arxiv.org/pdf/1411.1418.pdf

[6] H. M. Kreuzer. Calabi–yau data. [Online]. Available: http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/CY/

[7] V. V. Batyrev, "On the classification of toric fano 4-folds." [Online]. Available: https://arxiv.org/pdf/math/9801107.pdf

A Приложение

```
1st polytope:
s(N)=-600
dim=4, vert=5
type (a) ideal generators:
M:6 5 N:126 5 H:101,1 [200]
    1    0    0    0   -1
    0    1    0    0   -1
    0    0    1    0   -1
    0    0    0    1   -1

2nd polytope:
s(N)=-504
dim=4, vert=6
type (a) ideal generators:
[0, 1]
[2, 3, 4, 5]
M:7 6 N:105 8 H:86,2 [168]
    1   -1    0    0    0    0
    0    0    1    0    0   -1
    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    1   -1

3rd polytope:
s(N)=-528
dim=4, vert=6
type (a) ideal generators:
[0, 1]
[2, 3, 4, 5]
M:7 6 N:111 8 H:90,2 [176]
    1   -1    0    0    0    1
    0    0    1    0    0   -1
    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    1   -1

4th polytope:
s(N)=-504
dim=4, vert=6
type (a) ideal generators:
[3, 4, 5]
[0, 1, 2]
M:7 6 N:105 9 H:86,2 [168]
    1    0   -1    0    0    1
    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    1   -1

5th polytope:
s(N)=-504
dim=4, vert=6
type (a) ideal generators:
[3, 4, 5]
[0, 1, 2]
```

```
M:7 6 N:105 9 H:86,2 [168]
    1    0   -1    0    0    1
    0    1   -1    0    0    1
    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    1   -1

6th polytope:
s(N)=-504
dim=4, vert=6
type (a) ideal generators:
[4, 5]
[0, 1, 2, 3]
M:7 6 N:105 8 H:86,2 [168]
    1    0    0   -1    0    1
    0    1    0   -1    0    0
    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    1   -1

7th polytope:
s(N)=-486
dim=4, vert=6
type (a) ideal generators:
[1, 2, 3]
[0, 4, 5]
M:7 6 N:100 9 H:83,2 [162]
    1    0    0    0    0   -1
    0    1    0   -1    0    0
    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    1   -1

8th polytope:
s(N)=-600
dim=4, vert=6
type (a) ideal generators:
[0, 1]
[2, 3, 4, 5]
M:7 6 N:129 8 H:102,2 [200]
    1   -1    0    0    0    2
    0    0    1    0    0   -1
    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    1   -1

9th polytope:
s(N)=-558
dim=4, vert=6
type (a) ideal generators:
[3, 4, 5]
[0, 1, 2]
M:7 6 N:120 9 H:95,2 [186]
    1    0   -1    0    0    2
    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    1   -1
```

```
10th polytope:
s(N)=-720
dim=4, vert=6
type (a) ideal generators:
[0, 1]
[2, 3, 4, 5]
M:7 6 N:159 8 H:122,2 [240]
    1   -1    0    0    0    3
    0    0    1    0    0   -1
    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    1   -1

11th polytope:
s(N)=-408
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[0, 1]
[2, 3]
M:8 7 N:84 12 H:71,3 [136]
    1   -1    0   -1    0    0    1
    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1

12th polytope:
s(N)=-432
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[5, 6]
[0, 1]
[2, 3, 4]
M:8 7 N:90 12 H:75,3 [144]
    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    1    0   -1    0    1
    0    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    0    1   -1

13th polytope:
s(N)=-432
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[1, 5, 6]
[0, 1]
[0, 2, 3]
[2, 3, 4]
M:8 7 N:90 13 H:75,3 [144]
    1   -1    0    0    0    0    1
    0    0    1    0   -1    0    1
    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    1   -1

14th polytope:
```

```
s(N)=-432
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[0, 2]
[1, 6]
[3, 4, 5, 6]
[2, 3, 4, 5]
[0, 1]
M:8 7 N:90 11 H:75,3 [144]
    1   -1    0    0    0    0    1
    0    0    1    0    0   -1    1
    0    0    0    1    0   -1    0
    0    0    0    0    1   -1    0

15th polytope:
s(N)=-480
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[0, 2]
[1, 6]
[3, 4, 5, 6]
[2, 3, 4, 5]
[0, 1]
M:8 7 N:101 11 H:83,3 [160]
    1   -1    0    0    0    1    1
    0    0    1    0    0   -1    1
    0    0    0    1    0   -1    0
    0    0    0    0    1   -1    0

16th polytope:
s(N)=-456
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[5, 6]
[0, 1]
[2, 3, 4]
M:8 7 N:96 12 H:79,3 [152]
    1   -1    0    0    1    0    0
    0    0    1    0   -1    0    1
    0    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    0    1   -1

17th polytope:
s(N)=-432
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[3, 4]
[2, 5, 6]
[0, 1]
M:8 7 N:90 12 H:75,3 [144]
    1   -1    0    0    1    0    0
    0    0    1    0    0    0   -1
    0    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    0    1   -1
```

```
18th polytope:
s(N)=-504
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[1, 5, 6]
[0, 1]
[0, 2, 3]
[2, 3, 4]
M:8 7 N:108 13 H:87,3 [168]
    1   -1    0    0    1    0    1
    0    0    1    0   -1    0    1
    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    1   -1

19th polytope:
s(N)=-432
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[0, 1]
[2, 3]
M:8 7 N:90 12 H:75,3 [144]
    1   -1    0    1    0    0   -1
    0    0    1   -1    0    0    1
    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1

20th polytope:
s(N)=-468
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[0, 1]
[2, 3]
M:8 7 N:99 12 H:81,3 [156]
    1   -1    0    1    0    0    0
    0    0    1   -1    0    0    1
    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1

21th polytope:
s(N)=-480
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[0, 1]
[2, 3]
M:8 7 N:102 12 H:83,3 [160]
    1   -1    0    1    0    0    1
    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1
```

22th polytope:
s(N)=-414
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 6]
[0, 1, 2]
[3, 5]
M:8 7 N:85 12 H:72,3 [138]

```
   1   0  -1   0   0   0   1
   0   1  -1   0   0   1   0
   0   0   0   1   0  -1   0
   0   0   0   0   1   0  -1
```

23th polytope:
s(N)=-420
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[1, 6]
[0, 1, 2]
[0, 2, 3]
[3, 4, 5]
M:8 7 N:87 13 H:73,3 [140]

```
   1   0  -1   0   0   1   0
   0   1  -1   0   0   1  -1
   0   0   0   1   0  -1   1
   0   0   0   0   1  -1   0
```

24th polytope:
s(N)=-450
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[3, 4]
[5, 6]
[0, 1, 2]
M:8 7 N:95 12 H:78,3 [150]

```
   1   0  -1   0   1   0   0
   0   1  -1   0   0   0   0
   0   0   0   1  -1   0   1
   0   0   0   0   0   1  -1
```

25th polytope:
s(N)=-468
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[3, 4]
[5, 6]
[0, 1, 2]
M:8 7 N:100 12 H:81,3 [156]

```
   1   0  -1   0   1   0   1
   0   1  -1   0   0   0   0
   0   0   0   1  -1   0   0
   0   0   0   0   0   1  -1
```

```
26th polytope:
s(N)=-432
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[1, 2]
[0, 3]
M:8 7 N:90 12 H:75,3 [144]
    1    0    0   -1    0    0    0
    0    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1

27th polytope:
s(N)=-444
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[1, 2]
[0, 3]
M:8 7 N:93 12 H:77,3 [148]
    1    0    0   -1    0    0    1
    0    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1

28th polytope:
s(N)=-456
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[1, 2]
[0, 3]
M:8 7 N:96 12 H:79,3 [152]
    1    0    0   -1    0    0    1
    0    1   -1    0    0    0    1
    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1

29th polytope:
s(N)=-408
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[2, 3, 6]
[0, 1]
[1, 2, 3]
[0, 4, 5]
M:8 7 N:84 13 H:71,3 [136]
    1    0    0    0    0   -1    1
    0    1    0   -1    0    0    1
    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    1   -1    0
```

```
30th polytope:
s(N)=-414
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[3, 6]
[0, 1, 2]
[1, 2, 3]
[0, 4, 5]
M:8 7 N:85 13 H:72,3 [138]
    1    0    0    0    0   -1    1
    0    1    0   -1    0    0    1
    0    0    1   -1    0    0    1
    0    0    0    0    1   -1    0

31th polytope:
s(N)=-408
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[0, 1]
[2, 3]
M:8 7 N:84 12 H:71,3 [136]
    1   -1    0   -1    0    0    2
    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1

32th polytope:
s(N)=-576
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[0, 2]
[1, 6]
[3, 4, 5, 6]
[2, 3, 4, 5]
[0, 1]
M:8 7 N:123 11 H:99,3 [192]
    1   -1    0    0    0    2    1
    0    0    1    0    0   -1    1
    0    0    0    1    0   -1    0
    0    0    0    0    1   -1    0

33th polytope:
s(N)=-528
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[5, 6]
[0, 1]
[2, 3, 4]
M:8 7 N:114 12 H:91,3 [176]
    1   -1    0    0    2    0    0
    0    0    1    0   -1    0    1
```

```
   0   0   0   1  -1   0   0
   0   0   0   0   0   1  -1

34th polytope:
s(N)=-540
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[0, 1]
[2, 3]
M:8 7 N:117 12 H:93,3 [180]
   1  -1   0   1   0   0   0
   0   0   1  -1   0   0   2
   0   0   0   0   1   0  -1
   0   0   0   0   0   1  -1

35th polytope:
s(N)=-528
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[0, 1]
[2, 3]
M:8 7 N:114 12 H:91,3 [176]
   1  -1   0   1   0   0   2
   0   0   1  -1   0   0  -1
   0   0   0   0   1   0  -1
   0   0   0   0   0   1  -1

36th polytope:
s(N)=-552
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[0, 1]
[2, 3]
M:8 7 N:120 12 H:95,3 [184]
   1  -1   0   1   0   0   2
   0   0   1  -1   0   0   0
   0   0   0   0   1   0  -1
   0   0   0   0   0   1  -1

37th polytope:
s(N)=-438
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[0, 1, 2]
[3, 4, 6]
[1, 2, 6]
[3, 4, 5]
M:8 7 N:93 13 H:76,3 [146]
   1   0  -1   0   0   1   2
   0   1  -1   0   0   0   0
```

```
   0   0   0   1   0  -1  -1
   0   0   0   0   1  -1  -1

38th polytope:
s(N)=-480
dim=4, vert=7
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[1, 2]
[0, 3]
M:8 7 N:102 12 H:83,3 [160]
   1   0   0  -1   0   0   2
   0   1  -1   0   0   0   0
   0   0   0   0   1   0  -1
   0   0   0   0   0   1  -1

39th polytope:
s(N)=-336
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 6, 7]
[0, 3, 5]
[3, 5, 6]
[5, 6, 7]
[1, 4, 7]
[0, 5, 7]
[2, 3]
[2, 4, 6]
[1, 2, 4]
[0, 1]
M:9 8 N:69 18 H:60,4 [112]
   1   0   0   0   0  -1   1   0
   0   1   0   0  -1   0   1   0
   0   0   1   0  -1   0   0   1
   0   0   0   1   0  -1   0   1

40th polytope:
s(N)=-384
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[0, 7]
[3, 4]
[1, 6]
[2, 5]
M:9 8 N:81 16 H:68,4 [128]
   1   0   0   0   0   0   0  -1
   0   1   0   0   0   0  -1   0
   0   0   1   0   0  -1   0   0
   0   0   0   1  -1   0   0   0

41th polytope:
s(N)=-354
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
```

```
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[1, 7]
[0, 4]
[2, 3]
[0, 1]
M:9 8 N:74 16 H:63,4 [118]
    1   -1    0   -1    0    0    0    1
    0    0    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

42th polytope:
s(N)=-342
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[1, 7]
[0, 4]
[2, 3]
[0, 1]
M:9 8 N:72 16 H:61,4 [114]
    1   -1    0   -1    0    0    1    1
    0    0    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

43th polytope:
s(N)=-360
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 3]
[4, 5]
[0, 1]
[6, 7]
M:9 8 N:75 16 H:64,4 [120]
    1   -1    0   -1    0    1    0    0
    0    0    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

44th polytope:
s(N)=-342
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 4, 5]
[2, 6, 7]
[3, 4, 5]
[1, 4, 5]
[3, 6, 7]
[0, 6, 7]
[1, 2]
[0, 1]
```

```
[0, 3]
M:9 8 N:70 17 H:61,4 [114]
    1   -1    0   -1    0    1    0    0
    0    0    1    1    0   -1    0   -1
    0    0    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    0    0    1   -1

45th polytope:
s(N)=-360
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[5, 6]
[3, 4]
[0, 1]
[2, 7]
M:9 8 N:75 16 H:64,4 [120]
    1   -1    0    0   -1    0    1    1
    0    0    1    0    0    0    0   -1
    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    1   -1    0

46th polytope:
s(N)=-384
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[5, 7]
[0, 2]
[3, 4, 6]
[1, 6]
[0, 1]
[2, 3, 4]
M:9 8 N:82 16 H:68,4 [128]
    1   -1    0    0    0    0    1    0
    0    0    1    0   -1    0    1    1
    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0   -1

47th polytope:
s(N)=-372
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[5, 7]
[0, 2, 3]
[1, 6, 7]
[4, 6]
[2, 3, 5]
[0, 1]
[2, 3, 4]
M:9 8 N:78 17 H:66,4 [124]
    1   -1    0    0    0    0    1    0
    0    0    1    0    0   -1    0    1
    0    0    0    1    0   -1    0    1
    0    0    0    0    1    0   -1    1
```

```
48th polytope:
s(N)=-366
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[3, 4, 5]
[0, 2]
[1, 5]
[0, 1]
[6, 7]
[2, 3, 4]
M:9 8 N:76 16 H:65,4 [122]
    1   -1    0    0    0    1    0    0
    0    0    1    0   -1    1    0    0
    0    0    0    1   -1    0    0    1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

49th polytope:
s(N)=-378
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 6, 7]
[3, 4, 5]
[0, 2]
[5, 6, 7]
[1, 5]
[1, 6, 7]
[0, 3, 4]
[0, 1]
[2, 3, 4]
M:9 8 N:78 17 H:67,4 [126]
    1   -1    0    0    0    1    0    1
    0    0    1    0   -1    1    0   -1
    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1   -1

50th polytope:
s(N)=-402
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[3, 4, 5]
[0, 2]
[1, 5]
[0, 1]
[6, 7]
[2, 3, 4]
M:9 8 N:86 16 H:71,4 [134]
    1   -1    0    0    0    1    0    1
    0    0    1    0   -1    1    0    1
    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1   -1

51th polytope:
s(N)=-414
dim=4, vert=8
```

```
type (a) ideal generators:
[5, 7]
[0, 2]
[3, 4, 6]
[1, 6]
[0, 1]
[2, 3, 4]
M:9 8 N:90 16 H:73,4 [138]
    1   -1    0    0    1    0    1    0
    0    0    1    0   -1    0    1    1
    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0   -1

52th polytope:
s(N)=-456
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 4]
[3, 7]
[5, 6]
[0, 1]
M:9 8 N:99 16 H:80,4 [152]
    1   -1    0    0    1    0    1    1
    0    0    1    0   -1    0    0    0
    0    0    0    1    0    0    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

53th polytope:
s(N)=-408
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 6, 7]
[2, 4]
[5, 6, 7]
[3, 5]
[1, 2, 3]
[0, 6, 7]
[0, 1]
M:9 8 N:87 17 H:72,4 [136]
    1   -1    0    0    1    1    0   -1
    0    0    1    0   -1    0    0    1
    0    0    0    1    0   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

54th polytope:
s(N)=-414
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[3, 4, 5]
[0, 2]
[1, 5]
[0, 1]
[6, 7]
[2, 3, 4]
```

```
M:9 8 N:87 16 H:73,4 [138]
    1   -1    0    0    1    1    0    0
    0    0    1    0   -1    1    0    0
    0    0    0    1   -1    0    0    1
    0    0    0    0    0    0    1   -1
```

55th polytope:
s(N)=-468
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[3, 4, 5]
[0, 2]
[1, 5]
[0, 1]
[6, 7]
[2, 3, 4]

```
M:9 8 N:102 16 H:82,4 [156]
    1   -1    0    0    1    1    0    1
    0    0    1    0   -1    1    0    1
    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1   -1
```

56th polytope:
s(N)=-384
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[1, 7]
[0, 4]
[2, 3]
[0, 1]

```
M:9 8 N:81 16 H:68,4 [128]
    1   -1    0    1    0    0   -1    1
    0    0    1   -1    0    0    1    0
    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0
```

57th polytope:
s(N)=-420
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 3]
[4, 5]
[0, 1]
[6, 7]

```
M:9 8 N:90 16 H:74,4 [140]
    1   -1    0    1    0    0    0    0
    0    0    1   -1    0    1    0    0
    0    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    1   -1
```

58th polytope:
s(N)=-444

```
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 3]
[4, 5]
[0, 1]
[6, 7]
M:9 8 N:96 16 H:78,4 [148]
    1   -1    0    1    0    0    0    0
    0    0    1   -1    0    1    0    1
    0    0    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    0    0    1   -1

59th polytope:
s(N)=-390
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[1, 7]
[0, 4]
[2, 3]
[0, 1]
M:9 8 N:82 16 H:69,4 [130]
    1   -1    0    1    0    0    0    1
    0    0    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

60th polytope:
s(N)=-432
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[1, 7]
[0, 4]
[2, 3]
[0, 1]
M:9 8 N:92 16 H:76,4 [144]
    1   -1    0    1    0    0    0    1
    0    0    1   -1    0    0    1    0
    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

61th polytope:
s(N)=-384
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[5, 7]
[4, 6]
[2, 3]
[0, 1]
M:9 8 N:81 16 H:68,4 [128]
    1   -1    0    1    0    0    1    0
```

```
    0    0    1   -1    0    0   -1    1
    0    0    0    0    1    0   -1    0
    0    0    0    0    0    1    0   -1

62th polytope:
s(N)=-450
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[1, 7]
[0, 4]
[2, 3]
[0, 1]
M:9 8 N:96 16 H:79,4 [150]
    1   -1    0    1    0    0    1    1
    0    0    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

63th polytope:
s(N)=-432
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 3]
[4, 5]
[0, 1]
[6, 7]
M:9 8 N:93 16 H:76,4 [144]
    1   -1    0    1    0    1    0    0
    0    0    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

64th polytope:
s(N)=-360
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[5, 6, 7]
[1, 2]
[0, 4]
[1, 4]
[2, 3]
[0, 3]
M:9 8 N:75 15 H:64,4 [120]
    1    0    0   -1   -1    0    0    1
    0    1   -1    0   -1    0    0    1
    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

65th polytope:
s(N)=-372
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
```

```
[2, 4]
[1, 3]
[5, 6, 7]
[1, 2]
[0, 4]
[0, 3]
M:9 8 N:78 15 H:66,4 [124]
    1    0    0   -1   -1    0    0    1
    0    1   -1    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

66th polytope:
s(N)=-408
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 4]
[1, 3]
[5, 6, 7]
[1, 2]
[0, 4]
[0, 3]
M:9 8 N:86 15 H:72,4 [136]
    1    0    0   -1   -1    0    0    1
    0    1   -1    0    1    0    0    1
    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

67th polytope:
s(N)=-360
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[5, 7]
[4, 6]
[1, 2]
[0, 3]
M:9 8 N:75 16 H:64,4 [120]
    1    0    0   -1    0    0   -1    1
    0    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1    0
    0    0    0    0    0    1    0   -1

68th polytope:
s(N)=-372
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[3, 7]
[1, 2]
[0, 4]
[0, 3]
M:9 8 N:78 16 H:66,4 [124]
    1    0    0   -1    0    0    0    1
```

```
    0    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

69th polytope:
s(N)=-384
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[5, 6]
[1, 2]
[4, 7]
[0, 3]
M:9 8 N:81 16 H:68,4 [128]
    1    0    0   -1    0    0    0    1
    0    1   -1    0    0    0    1    0
    0    0    0    0    1    0    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

70th polytope:
s(N)=-372
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 6, 7]
[1, 6, 7]
[0, 2, 5]
[3, 6, 7]
[1, 2]
[4, 5]
[0, 3]
M:9 8 N:78 17 H:66,4 [124]
    1    0    0   -1    0    0    0    1
    0    1   -1    0    0    1    0    0
    0    0    0    0    1   -1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

71th polytope:
s(N)=-384
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[1, 2]
[1, 4]
[2, 7]
[0, 3]
M:9 8 N:81 16 H:68,4 [128]
    1    0    0   -1    0    0    1    0
    0    1   -1    0    0    0    0    1
    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

72th polytope:
s(N)=-396
dim=4, vert=8
```

```
type (a) ideal generators:
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[3, 7]
[1, 2]
[0, 4]
[0, 3]
M:9 8 N:84 16 H:70,4 [132]
    1    0    0   -1    0    0    1    1
    0    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

73th polytope:
s(N)=-408
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[5, 6]
[1, 2]
[4, 7]
[0, 3]
M:9 8 N:87 16 H:72,4 [136]
    1    0    0   -1    0    0    1    1
    0    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    1    0    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1    0

74th polytope:
s(N)=-396
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[1, 2]
[4, 5]
[6, 7]
[0, 3]
M:9 8 N:84 16 H:70,4 [132]
    1    0    0   -1    0    1    0    0
    0    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

75th polytope:
s(N)=-378
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[4, 6, 7]
[3, 5]
[1, 2]
[2, 5]
[0, 1]
[0, 3]
M:9 8 N:80 15 H:67,4 [126]
    1    0    0   -1    0    1    0    0
    0    1   -1    0    0    1    0    0
```

```
    0    0    0    0    1    0    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

76th polytope:
s(N)=-408
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 4]
[5, 6, 7]
[1, 2]
[3, 4]
[0, 1]
[0, 3]
M:9 8 N:87 15 H:72,4 [136]
    1    0    0   -1    1    0    0    1
    0    1   -1    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

77th polytope:
s(N)=-432
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 4]
[5, 6, 7]
[1, 2]
[3, 4]
[0, 1]
[0, 3]
M:9 8 N:93 15 H:76,4 [144]
    1    0    0   -1    1    0    0    1
    0    1   -1    0    1    0    0    1
    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

78th polytope:
s(N)=-384
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[1, 4]
[2, 3]
[6, 7]
M:9 8 N:81 16 H:68,4 [128]
    1    0    0    0    0   -1    0    1
    0    1    0    0   -1    0    0    0
    0    0    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1   -1

79th polytope:
s(N)=-384
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[0, 5]
```

```
[4, 6, 7]
[5, 6, 7]
[3, 6, 7]
[1, 4]
[2, 3]
[0, 1, 2]
M:9 8 N:81 17 H:68,4 [128]
    1    0    0    0    0   -1    0    1
    0    1    0    0   -1    0    0    1
    0    0    1   -1    0    0    0    1
    0    0    0    0    0    0    1   -1
```

80th polytope:
s(N)=-342
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:

```
[3, 6]
[1, 3, 4]
[4, 5, 6]
[5, 6, 7]
[1, 2, 3]
[0, 5, 7]
[0, 4, 5]
[0, 1, 2]
[2, 7]
[0, 1, 4]
M:9 8 N:70 18 H:61,4 [114]
    1    0    0    0    0   -1    1    0
    0    1    0   -1    0    0    1    0
    0    0    1   -1    0    0    1   -1
    0    0    0    0    1   -1    0    1
```

81th polytope:
s(N)=-366
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:

```
[3, 6]
[4, 5, 6]
[1, 2, 3]
[4, 5, 7]
[0, 4, 5]
[0, 1]
[2, 7]
M:9 8 N:77 17 H:65,4 [122]
    1    0    0    0    0   -1    1    1
    0    1    0   -1    0    0    1    1
    0    0    1   -1    0    0    1    0
    0    0    0    0    1   -1    0    0
```

82th polytope:
s(N)=-390
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:

```
[2, 4]
```

```
[1, 3]
[5, 6, 7]
[1, 2]
[0, 4]
[0, 3]
M:9 8 N:81 15 H:69,4 [130]
    1    0    0   -1   -1    0    0    2
    0    1   -1    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

83th polytope:
s(N)=-462
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 4]
[5, 6, 7]
[1, 2]
[3, 4]
[0, 1]
[0, 3]
M:9 8 N:99 15 H:81,4 [154]
    1    0    0   -1    1    0    0    2
    0    1   -1    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

84th polytope:
s(N)=-480
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 4]
[5, 6, 7]
[1, 2]
[3, 4]
[0, 1]
[0, 3]
M:9 8 N:104 15 H:84,4 [160]
    1    0    0   -1    1    0    0    2
    0    1   -1    0    1    0    0    1
    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1

85th polytope:
s(N)=-522
dim=4, vert=8
type (a) ideal generators:
[2, 4]
[5, 6, 7]
[1, 2]
[3, 4]
[0, 1]
[0, 3]
M:9 8 N:114 15 H:91,4 [174]
```

1	0	0	-1	1	0	0	2
0	1	-1	0	1	0	0	2
0	0	0	0	0	1	0	-1
0	0	0	0	0	0	1	-1

86th polytope:
s(N)=-336
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[3, 4]
[0, 7]
[6, 8]
[2, 5]
[1, 6]
[0, 1]
[7, 8]
M:10 9 N:72 20 H:61,5 [112]

1	0	0	0	0	0	0	-1	1
0	1	0	0	0	0	-1	0	1
0	0	1	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	1	-1	0	0	0	0

87th polytope:
s(N)=-312
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[6, 7, 8]
[4, 7, 8]
[3, 4]
[5, 6, 8]
[0, 1, 3]
[4, 5, 8]
[4, 6, 8]
[0, 7]
[0, 2, 3]
[1, 2, 3]
[5, 7, 8]
[2, 5]
[0, 1, 2]
[1, 6]
M:10 9 N:66 23 H:57,5 [104]

1	0	0	0	0	0	0	-1	1
0	1	0	0	0	0	-1	0	1
0	0	1	0	0	-1	0	0	1
0	0	0	1	-1	0	0	0	1

88th polytope:
s(N)=-324
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[6, 7, 8]
[4, 7, 8]
[1, 7, 8]
[0, 2, 5]

```
[5, 6]
[0, 4]
[0, 3]
[3, 7, 8]
[2, 4]
[1, 3]
[1, 2]
M:10 9 N:69 21 H:59,5 [108]
    1    0    0   -1   -1    0    0    0    1
    0    1   -1    0    1    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

89th polytope:
s(N)=-336
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[5, 8]
[0, 4]
[0, 3]
[6, 7]
[2, 4]
[1, 3]
[1, 2]
M:10 9 N:71 20 H:61,5 [112]
    1    0    0   -1   -1    0    0    1    1
    0    1   -1    0    1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    1    0    0   -1
    0    0    0    0    0    0    1   -1    0

90th polytope:
s(N)=-330
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[5, 6]
[0, 4]
[0, 3]
[2, 4]
[1, 3]
[1, 2]
[7, 8]
M:10 9 N:70 20 H:60,5 [110]
    1    0    0   -1   -1    0    1    0    0
    0    1   -1    0    1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

91th polytope:
s(N)=-306
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[2, 7]
[4, 5]
[0, 3]
```

```
[3, 7]
[6, 8]
[1, 2]
[0, 1]
M:10 9 N:65 20 H:56,5 [102]
    1    0    0   -1    0   -1    0    1    0
    0    1   -1    0    0    0    0    1   -1
    0    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1

92th polytope:
s(N)=-312
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[2, 7]
[4, 5]
[0, 3]
[3, 7]
[6, 8]
[1, 2]
[0, 1]
M:10 9 N:67 20 H:57,5 [104]
    1    0    0   -1    0   -1    0    1    1
    0    1   -1    0    0    0    0    1    0
    0    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1

93th polytope:
s(N)=-318
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[6, 7, 8]
[2, 8]
[5, 6, 8]
[1, 4]
[0, 3]
[3, 7]
[4, 6, 7]
[4, 5, 6]
[1, 2]
M:10 9 N:67 21 H:58,5 [106]
    1    0    0   -1    0    0    0    1    0
    0    1   -1    0    0    0    0    0    1
    0    0    0    0    1    0   -1    0    1
    0    0    0    0    0    1   -1    1    0

94th polytope:
s(N)=-342
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[2, 7]
[4, 5]
[0, 3]
```

```
[3, 7]
[6, 8]
[1, 2]
[0, 1]
M:10 9 N:73 20 H:62,5 [114]
    1    0    0   -1    0    0    0    1    1
    0    1   -1    0    0   -1    0    1    0
    0    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1

95th polytope:
s(N)=-330
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[3, 6]
[4, 5]
[0, 3]
[2, 6]
[1, 2]
[0, 1]
[7, 8]
M:10 9 N:71 20 H:60,5 [110]
    1    0    0   -1    0    0    1    0    1
    0    1   -1    0    0   -1    1    0    1
    0    0    0    0    1   -1    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

96th polytope:
s(N)=-366
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[3, 5]
[4, 6]
[0, 3]
[2, 5]
[1, 2]
[0, 1]
[7, 8]
M:10 9 N:79 20 H:66,5 [122]
    1    0    0   -1    0    1    1    0    0
    0    1   -1    0    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

97th polytope:
s(N)=-384
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[3, 5]
[4, 6]
[0, 3]
[2, 5]
[1, 2]
[0, 1]
```

```
[7, 8]
M:10 9 N:83 20 H:69,5 [128]
    1    0    0   -1    0    1    1    0    1
    0    1   -1    0    0    1    0    0    0
    0    0    0    0    1    0   -1    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

98th polytope:
s(N)=-330
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[2, 3, 8]
[3, 4]
[0, 5, 6]
[5, 6, 7]
[0, 3]
[2, 4]
[4, 5, 6]
[1, 5, 6]
[1, 2]
[0, 1]
[7, 8]
M:10 9 N:71 21 H:60,5 [110]
    1    0    0   -1    1    0    0    0    1
    0    1   -1    0    1    0    0    0    1
    0    0    0    0    0    1    0   -1    1
    0    0    0    0    0    0    1   -1    1

99th polytope:
s(N)=-354
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[3, 4]
[5, 6]
[0, 3]
[2, 4]
[1, 2]
[0, 1]
[7, 8]
M:10 9 N:77 20 H:64,5 [118]
    1    0    0   -1    1    0    0    0    1
    0    1   -1    0    1    0    1    0    0
    0    0    0    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

100th polytope:
s(N)=-390
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[3, 4]
[5, 6]
[0, 3]
[2, 4]
[1, 2]
```

```
[0, 1]
[7, 8]
M:10 9 N:85 20 H:70,5 [130]
    1    0    0   -1    1    0    1    0    0
    0    1   -1    0    1    0    1    0    0
    0    0    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

101th polytope:
s(N)=-390
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[3, 4]
[5, 6]
[0, 3]
[2, 4]
[1, 2]
[0, 1]
[7, 8]
M:10 9 N:85 20 H:70,5 [130]
    1    0    0   -1    1    0    1    0    1
    0    1   -1    0    1    0    0    0    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

102th polytope:
s(N)=-420
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[3, 4]
[5, 6]
[0, 3]
[2, 4]
[1, 2]
[0, 1]
[7, 8]
M:10 9 N:92 20 H:75,5 [140]
    1    0    0   -1    1    0    1    0    1
    0    1   -1    0    1    0    1    0    1
    0    0    0    0    0    1   -1    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

103th polytope:
s(N)=-312
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[6, 7, 8]
[4, 7, 8]
[2, 3]
[3, 4]
[1, 4]
[3, 7, 8]
[2, 6]
```

```
[5, 7, 8]
[0, 1, 2]
[1, 6]
M:10 9 N:66 21 H:57,5 [104]
    1    0    0    0    0   -1    0    0    1
    0    1    0    0   -1    0   -1    0    1
    0    0    1   -1    0    0   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

104th polytope:
s(N)=-336
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[2, 3]
[1, 4]
[3, 7]
[6, 8]
[1, 2]
[4, 7]
M:10 9 N:72 20 H:61,5 [112]
    1    0    0    0    0   -1    0    0    1
    0    1    0    0   -1    0    0    1    0
    0    0    1   -1    0    0    0    1    0
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1

105th polytope:
s(N)=-348
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[2, 3]
[5, 7]
[1, 4]
[6, 8]
[0, 1]
[4, 7]
M:10 9 N:75 20 H:63,5 [116]
    1    0    0    0    0   -1    0    1    1
    0    1    0    0   -1    0    0    1    0
    0    0    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1

106th polytope:
s(N)=-324
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[2, 3]
[4, 6]
[5, 6]
[1, 4]
[0, 1]
[7, 8]
```

```
M:10 9 N:69 20 H:59,5 [108]
    1    0    0    0    0   -1    1    0    0
    0    1    0    0   -1    0    1    0   -1
    0    0    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

107th polytope:
s(N)=-360
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[2, 3]
[4, 6]
[5, 6]
[1, 4]
[0, 1]
[7, 8]
M:10 9 N:78 20 H:65,5 [120]
    1    0    0    0    0   -1    1    0    1
    0    1    0    0   -1    0    1    0    1
    0    0    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

108th polytope:
s(N)=-324
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[6, 7, 8]
[2, 3]
[3, 4]
[1, 5]
[0, 4]
[1, 4]
[0, 3]
[2, 5]
[1, 2]
M:10 9 N:70 18 H:59,5 [108]
    1    0    1   -1    0   -1    0    0    0
    0    1   -1    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

109th polytope:
s(N)=-336
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[6, 7, 8]
[2, 3]
[3, 4]
[1, 5]
[0, 4]
[1, 4]
```

```
[0, 3]
[2, 5]
[1, 2]
M:10 9 N:72 18 H:61,5 [112]
    1    0    1   -1    0   -1    0    0    1
    0    1   -1    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

110th polytope:
s(N)=-360
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[6, 7, 8]
[2, 3]
[3, 4]
[1, 5]
[0, 4]
[1, 4]
[0, 3]
[2, 5]
[1, 2]
M:10 9 N:76 18 H:65,5 [120]
    1    0    1   -1    0   -1    0    0    1
    0    1   -1    1   -1    0    0    0    1
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

111th polytope:
s(N)=-270
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[1, 6, 8]
[3, 6]
[1, 7, 8]
[0, 6, 8]
[2, 3, 8]
[0, 5, 7]
[0, 5, 6]
[0, 7, 8]
[0, 4, 7]
[4, 5]
[2, 4, 7]
[2, 7, 8]
[2, 3, 4]
[1, 5, 7]
[1, 5, 6]
[1, 2]
[0, 3, 4]
[0, 3, 8]
M:10 9 N:55 24 H:50,5 [90]
    1    0    1    0   -1    0    0    0   -1
    0    1   -1    0    1    0   -1   -1    1
```

```
    0    0    0    1   -1    0    0    1   -1
    0    0    0    0    0    1   -1   -1    1
```

112th polytope:
s(N)=-372
dim=4, vert=9
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[6, 7, 8]
[2, 3]
[3, 4]
[1, 5]
[0, 4]
[1, 4]
[0, 3]
[2, 5]
[1, 2]
M:10 9 N:78 18 H:67,5 [124]

```
    1    0    1   -1    0   -1    0    0    2
    0    1   -1    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1
```

113th polytope:
s(N)=-294
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[0, 7]
[5, 9]
[1, 6]
[0, 1]
[2, 3]
[3, 4]
[4, 9]
[6, 8]
[2, 5]
[7, 8]
M:11 10 N:64 25 H:55,6 [98]

```
    1    0    0    0    0    0    0   -1    1    0
    0    1    0    0    0    0   -1    0    1    0
    0    0    1    0    0   -1    0    0    0    1
    0    0    0    1   -1    0    0    0    0    1
```

114th polytope:
s(N)=-288
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[2, 7]
[4, 5]
[2, 6]
[3, 7]
[1, 8]
[4, 7]
[3, 6]

```
[0, 9]
[3, 4]
[5, 6]
[2, 5]
M:11 10 N:63 24 H:54,6 [96]
    1    0    0    0    0    0    0    0    0   -1
    0    1    0    0    0    0    0    0   -1    0
    0    0    1    0    1   -1    0   -1    0    0
    0    0    0    1   -1    1   -1    0    0    0

115th polytope:
s(N)=-240
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[4, 8, 9]
[0, 5, 7]
[0, 6, 7]
[2, 7]
[3, 4, 8]
[4, 5]
[2, 3, 9]
[2, 3, 4]
[1, 5, 7]
[0, 1, 6]
[1, 8]
[3, 6]
[0, 9]
[2, 4, 9]
[2, 3, 8]
[1, 6, 7]
[0, 5, 6]
[5, 6, 7]
[3, 4, 9]
[2, 4, 8]
[2, 8, 9]
[0, 1, 7]
[1, 5, 6]
[0, 1, 5]
[3, 8, 9]
M:11 10 N:51 30 H:46,6 [80]
    1    0    0    0    1   -1    0    0    0   -1
    0    1    0    0    1   -1    0    0   -1    0
    0    0    1    0   -1    1    0   -1    0    0
    0    0    0    1   -1    1   -1    0    0    0

116th polytope:
s(N)=-288
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[8, 9]
[1, 4]
[4, 5]
[0, 7]
[2, 6]
```

```
[1, 6]
[3, 6]
[2, 3]
[3, 4]
[1, 5]
[2, 5]
M:11 10 N:63 24 H:54,6 [96]
    1    0    0    0    0    0    0   -1    0    1
    0    1    0    1   -1    0   -1    0    0    0
    0    0    1   -1    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

117th polytope:
s(N)=-288
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[8, 9]
[0, 5]
[2, 7]
[0, 4]
[4, 5]
[0, 7]
[3, 7]
[1, 6]
[2, 3]
[3, 4]
[2, 5]
M:11 10 N:63 24 H:54,6 [96]
    1    0    0    1   -1    0    0   -1    0    1
    0    1    0    0    0    0   -1    0    0    0
    0    0    1   -1    1   -1    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

118th polytope:
s(N)=-264
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[0, 4]
[1, 4]
[2, 3]
[3, 4]
[1, 5]
[0, 3]
[7, 9]
[6, 8]
[2, 5]
[1, 2]
M:11 10 N:59 24 H:50,6 [88]
    1    0    1   -1    0   -1    0    0   -1    1
    0    1   -1    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0   -1    0
    0    0    0    0    0    0    0    1    0   -1
```

119th polytope:
s(N)=-276
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[0, 4]
[1, 4]
[2, 3]
[3, 4]
[1, 5]
[0, 3]
[7, 9]
[6, 8]
[2, 5]
[1, 2]
M:11 10 N:61 24 H:52,6 [92]

1	0	1	-1	0	-1	0	0	-1	1
0	1	-1	1	-1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1

120th polytope:
s(N)=-300
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[0, 4]
[1, 4]
[2, 3]
[3, 4]
[6, 9]
[1, 5]
[0, 3]
[2, 5]
[1, 2]
[7, 8]
M:11 10 N:65 24 H:56,6 [100]

1	0	1	-1	0	-1	0	0	0	1
0	1	-1	1	-1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0

121th polytope:
s(N)=-312
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[0, 5]
[0, 4]
[1, 4]
[2, 3]
[3, 4]
[6, 9]
[1, 5]
[0, 3]

```
[2, 5]
[1, 2]
[7, 8]
M:11 10 N:67 24 H:58,6 [104]
    1    0    1   -1    0   -1    0    0    1    1
    0    1   -1    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1    0    0   -1
    0    0    0    0    0    0    0    1   -1    0

122th polytope:
s(N)=-300
dim=4, vert=10
type (a) ideal generators:
[8, 9]
[0, 5]
[0, 4]
[1, 4]
[6, 7]
[2, 3]
[3, 4]
[1, 5]
[0, 3]
[2, 5]
[1, 2]
M:11 10 N:65 24 H:56,6 [100]
    1    0    1   -1    0   -1    0    1    0    0
    0    1   -1    1   -1    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    1   -1    0    1
    0    0    0    0    0    0    0    0    1   -1

123th polytope:
s(N)=-252
dim=4, vert=11
type (a) ideal generators:
[2, 7]
[2, 6]
[3, 7]
[8, 10]
[3, 6]
[0, 9]
[4, 5]
[1, 8]
[0, 1]
[4, 7]
[3, 4]
[9, 10]
[5, 6]
[2, 5]
M:12 11 N:56 30 H:49,7 [84]
    1    0    0    0    0    0    0    0    0   -1    1
    0    1    0    0    0    0    0    0   -1    0    1
    0    0    1    0    1   -1    0   -1    0    0    0
    0    0    0    1   -1    1   -1    0    0    0    0
```

124th polytope:
s(N)=-216
dim=4, vert=12
type (a) ideal generators:
[0, 8]
[2, 10]
[3, 11]
[1, 9]
[4, 7]
[3, 4]
[5, 6]
[2, 5]
[7, 8]
[0, 7]
[2, 9]
[1, 6]
[6, 9]
[4, 11]
[3, 8]
[5, 10]
[0, 11]
[1, 10]
M:13 12 N:49 36 H:44,8 [72]

1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	-1
0	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	-1	0
0	0	1	0	0	-1	1	0	0	-1	0	0
0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0