Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Образующие Калаби-Яу в кольце SU-бордизмов

группа 403

Корюкин Григорий

научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

Тарас Евгеньевич Панов

Введение

SU-бордизмы - обобщенная теория гомологий на SU-многообразиях (со специальной унитарной структурой в стабильно касательном расслоении). Доказано, что кольцо кобордизмов Ω^{SU} имеет вид 1. Образующие этого кольца - классы SU-бордизма некоторых многообразий. Хочется иметь геометрические представители этих классов. В комплексных размерностях больше 5, эти образующие можно получить с помощью квазиторических многообразий, однако в меньшей размерности все квазиторические многообразия бордантны нулю. Поэтому для описания всех образующих одним семейством многообразий квазиторические не подходят.

Однако их можно получить с помощью торической геометрии. Ниже будет рассмотрена конструкция гиперповерхностей Калаби-Яу, которые мультпликативно порождают кольцо SU-бордизмов с обращенной двойкой, рассмотрены образующие в размерностях $i \leq 4$ и доказан следующий результат: гиперповехность Калаби-Яу вида N_ω (антиканоническая гиперповрехность в произведении комплексных проективных пространств, см. конструкцию) не может представлять неразложимый элемент класса образующих в кольце Ω^{SU} в комплексной размерности $i \geq 3$.

Структура Ω^{SU}

Первым структурным результатом о кольце Ω^{SU} была теорема С.П. Новикова 1962 г., показывающая, что Ω^{SU} становится полиномиальным кольцом после обращения двойки (хотя само Ω^{SU} не является полиномиальным даже по модулю кручения). Класс бордизмов $\left[M^{2i}\right] \in \Omega^U_{2i}$ является полиномиальной образующей в Ω^U тогда и только тогда, когда

$$s_i\left[M^{2i}\right] = \pm m_i$$

Более сложные условия делимости на s_i-число позволяют определить и полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$.

Теорема 1 (С.П. Новиков [1, Теорема 2.1])**.** $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ *представляет собой полиномиальное кольцо с одной образующей в каждой четной* *размерности ≥ 4 :*

$$\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][y_i : i \geq 2], \quad \deg y_i = 2i.$$

Класс бордизмов SU-многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной образующей y_i тогда и только тогда, когда

$$s_i\left[M^{2i}\right] = \pm m_i m_{i-1} \quad \text{с точностью до степени двойки.}$$

Для каждого целого числа $n \geq 3$ обозначим

$$g(n) = \begin{cases} 2m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n > 3 \text{ нечетно;} \\ m_{n-1}m_{n-2}, & \text{если } n > 3 \text{ четно;} \\ -48, & \text{если } n = 3 \end{cases} \tag{1}$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *[1, Теорема 7.1] Существуют неразложимые элементы $y_i \in \Omega_{2i}^{SU}$, $i \leq 2$ с минимальными s-числами $s_i(y_i) = g(i+1)$.*

Конструкция Батырева

Мы называем компактное кэлерово многообразие M с $c_1(M) = 0$ многообразием Калаби-Яу. По определению многообразие Калаби-Яу является SU-многообразием.

Дальше в тексте торические многообразия являются полными и неособыми, если не оговорено противное. Стандартная комплексная структура на торическом многообразии не может быть SU-структурой, поэтому среди торических многообразий нет многообразий Калаби-Яу. Однако следующая конструкция дает гиперповерхности Калаби-Яу в торических многообразиях специального вида.

Конструкция 1 (В.В. Батырев [1, Конструкция 11.1])**.** Торическое многообразие V называется многообразием Фано, если его антиканонический класс $D_1 + \cdots + D_m$ (представляющий $c_1(V)$) является очень обильным. В геометрических терминах, проективное вложение $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, отвечающее дивизору $D_1 + \cdots + D_m$, приходит из целочисленного многогранника P, в котором расстояние по решетке от 0 до каждой гиперплоскости, содержащей гипергрань, равно 1. Такой многогранник P называется рефлексивным; его двойственный многогранник P^* также является целочисленным.

Подмногообразие N, двойственное к первому классу Чженя $c_1(V)$ (см. конструкцию 6.1), задается как гиперплоское сечение вложения $V \hookrightarrow \mathbb{C}P^s$, определяемого дивизором $D_1 + \dots + D_m$. Поэтому $N \subset V$ является гладкой алгебраической гиперповерхностью в V, так что N - многообразие Калаби-Яу комплексной размерности $n-1$.

Таким образом, по любому торическому многообразию Фано V размерности n (или, эквивалентно, по любому неособому рефлексивному n-мерному многограннику P) можно построить каноническое $(n-1)$-мерное многообразие Калаби-Яу N_P.

Леммы для вычислений

Характеристические s-числа многообразий Калаби–Яу $N = N_P$ задаются следующим образом.

Лемма 1. *[1, Лемма 11.2] Имеет место формула:*

$$s_{n-1}(N) = \left\langle (v_1 + \dots + v_m)\left(v_1^{n-1} + \dots + v_m^{n-1}\right) - (v_1 + \dots + v_m)^n, [V] \right\rangle .$$

Доказательство. Воспользуемся изоморфизмом комплексных векторных расслоений $\mathscr{T}N \oplus \nu \cong i^*\mathscr{T}V$, где ν - нормальное расслоение вложения $i : N \hookrightarrow V$. Поэтому $s_{n-1}(\mathscr{T}N) + s_{n-1}(\nu) = i^* s_{n-1}(\mathscr{T}V)$, и мы получаем

$$\begin{aligned}\langle s_{n-1}(\mathscr{T}N), [N]\rangle &= \langle -s_{n-1}(\nu) + i^* s_{n-1}(\mathscr{T}V), [N]\rangle \\ &= \left\langle c_1(\mathscr{T}V)\left(-c_1^{n-1}(\mathscr{T}V) + s_{n-1}(\mathscr{T}V)\right), [V]\right\rangle \\ &= \langle c_1(\mathscr{T}V) s_{n-1}(\mathscr{T}V) - c_1^n(\mathscr{T}V), [V]\rangle .\end{aligned}$$

□

Обозначим через $\omega = (i_1, \dots, i_k)$ неупорядоченное разбиение числа n в сумму k положительных целых чисел, т.е. $i_1 + \dots + i_k = n$. Пусть Δ^i– стандартный рефлексивный симплекс размерности i. Тогда $P_\omega = \Delta^{i_1} \times \dots \times \Delta^{i_k}$ есть рефлексивный многогранник, соответствующий торическому многообразию Фано $\mathbb{C}P^\omega = \mathbb{C}P^{i_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{i_k}$. Обозначим через N_ω гиперповерхность Калаби-Яу в $\mathbb{C}P^\omega$, получаемую применением конструкции Батырева.

Пусть $\widehat{P}(n)$– множество всех разбиений ω числа n на слагаемые, не превосходящие $n-2$. Таким образом,

$$\widehat{P}(n)=\{\omega=(i_1,\ldots,i_k):i_1+\cdots+i_k=n,\omega\neq(n),(1,n-1)\}.$$

Для каждого $\omega=(i_1,\ldots,i_k)$ определен мультиномиальный коэффициент $C_n^\omega=\frac{n!}{i_1!\cdots i_k!}$. Положим

$$\alpha(\omega)=C_n^\omega\,(i_1+1)^{i_1}\cdots(i_k+1)^{i_k}. \tag{2}$$

Лемма 2. *[1, Лемма 12.1] Для любого $\omega\in\widehat{P}(n)$ имеет место равенство*

$$s_{n-1}\left(N_\omega\right)=-\alpha(\omega).$$

Доказательство. Кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P^\omega=\mathbb{C}P^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{C}P^{i_k}$ задается изоморфизмом

$$H^*\left(\mathbb{C}P^\omega;\mathbb{Z}\right)\cong\mathbb{Z}\left[u_1,\ldots,u_k\right]/\left(u_1^{i_1+1},\ldots,u_k^{i_k+1}\right),$$

где

$$u_1:=v_1=\cdots=v_{i_1+1},\quad u_2:=v_{i_1+2}=\cdots=v_{i_1+i_2+2},\quad\cdots,$$
$$u_k:=v_{i_1+\cdots+i_{k-1}+k}=\cdots=v_{i_1+\cdots+i_k+k}=v_m.$$

Поскольку $\omega\in\widehat{P}(n)$, мы имеем $v_i^{n-1}=0$ в кольце $H^*\left(\mathbb{C}P^\omega;\mathbb{Z}\right)$ для любого i. Формула из леммы 11.2 дает

$$\begin{aligned}s_{n-1}\left(N_\omega\right)&=-\left\langle\left(v_1+\cdots+v_m\right)^n,\left[\mathbb{C}P^\omega\right]\right\rangle=\\&=-\left\langle\left(\left(i_1+1\right)u_1+\cdots+\left(i_k+1\right)u_k\right)^n,\left[\mathbb{C}P^\omega\right]\right\rangle.\end{aligned}$$

Значение на фундаментальном классе $[\mathbb{C}P^\omega]$ равно коэффициенту при мономе $u_1^{i_1}\cdots u_k^{i_k}$, откуда следует утверждение леммы. □

Образующие Калаби-Яу маломерные

Для $i\geq 5$ каждая образующая $y_i\in\Omega_{2i}^{SU}$ может быть задана квазиторическим многообразием. С другой стороны, каждое квазиторическое SU-многообразие вещественной размерности ≤ 8 бордантно нулю.

Однако конструкция Батырева позволяет найти геометрические представителей Калаби-Яу для образующих y_i кольца SU-бордизмов в комплексной размерности $i\leq 4$.

Имеют место соотношения

$$\Omega_4^{SU} = \mathbb{Z}\left\langle y_2 \right\rangle, \quad \Omega_6^{SU} = \mathbb{Z}\left\langle y_3 \right\rangle, \quad \Omega_8^{SU} = \mathbb{Z}\left\langle \frac{1}{4}y_2^2, y_4 \right\rangle$$

где значения s-чисел образующих задаются формулами

$$s_2\left(y_2\right) = -48, \quad s_3\left(y_3\right) = m_3 m_2 = 6, \quad s_4\left(y_4\right) = 2m_4 m_3 = 20$$

Попробуем найти какую-то линейную комбинацию подмногообразий Калаби-Яу, которые будут представлять y_2, y_3, y_4.
Пользуясь леммой 2 найдем:

$$s_3(N_{(2,2)}) = -\alpha(2,2) = -C_4^{(2,2)}(2+1)^2(2+1)^2 = -\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 81 = -486$$

$$s_3(N_{(1,1,1,1)}) = -\alpha(1,1,1,1) = -C_4^{(1,1,1,1)}(1+1)^1(1+1)^1(1+1)^1(1+1)^1 = \\ = -\frac{4!}{1!\cdot ... \cdot 1!}\cdot 2^4 = -384$$

А значит

$$s_3(15\cdot N_{(2,2)} - 19\cdot N_{(1,1,1,1)}) = 15\cdot(-486) - 19\cdot(-384) = -7290 + 7296 = 6$$

Получим, что $15N_{(2,2)} - 19N_{(1,1,1,1)}$ предсталяет y_3, т.к.

$$s_3(y_3) = 6 = s_3(15N_{(2,2)} - 19N_{(1,1,1,1)})$$

Абсолютно также поступим для y_4

$$N_{(1,1,3)} = -\alpha(1,1,3) = -C_5^{(1,1,3)}(1+1)^1(1+1)^1(3+1)^3 = -\frac{5!}{3!}\cdot 4\cdot 64 = -5120$$

$$N_{(1,2,2)} = -\alpha(1,2,2) = -C_5^{(1,2,2)}(1+1)^1(2+1)^2(2+1)^2 = \\ = -\frac{5!}{2!\cdot 2!}\cdot 2\cdot 81 = -4860$$

$$s_4(56N_{(1,1,3)} - 59N_{(1,2,2)}) = -56\cdot 5120 + 59\cdot 4860 = -286\,720 + 286\,740 = 20$$

А значит $56N_{(1,1,3)} - 59N_{(1,2,2)}$ предсталяет класс y_4

$$s_4(y_4) = 20 = s_4(56N_{(1,1,3)} - 59N_{(1,2,2)})$$

Для y_2 же можно в качестве представляющих выбрать $N_{(3)}$ или $N_{(1,1,1)}$, для них выполнено $s_2(N_{(3)}) = s_2(N_{(1,1,1)}) = s_2(y_2) = -48$

Старшие размерности

В малых размерностях мы нашли какие-то линейные комбинации подмногообразий Калаби-Яу, которые представляют неразложимые элементы класса образующих кольца $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$ для $i \leq 4$. На самом деле, то же верно и для $i \geq 5$, для этого над потребуется следующая

Лемма 3. *[1, Лемма 12.2], При $n \geq 3$ имеет место соотношение*

$$\text{н.о.д. } \alpha(\omega) = g(n), \quad \omega \in \widehat{P}(n)$$

Теорема 3. *[1, Теорема 12.3] Классы SU-бордизмов гиперповерхностей Калаби-Яу N_ω в торических многообразиях $\mathbb{C}P^{i_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P^{i_k}$ с $\omega \in \widehat{P}(n), n \geq 3$, мультипликативно порождают кольцо SU- бордизмов $\Omega^{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$.*

Доказательство. Для любого $n \geq 3$ леммы 2 и 3 дают нам линейную комбинацию классов бордизмов $[N_\omega] \in \Omega^{SU}_{2n}$, характеристическое s-число которой равно $g(n+1)$. Такая линейная комбинация дает полиномиальную образующую y_n в кольце $\Omega^{SU}\left[\frac{1}{2}\right]$, описанную в теореме 2. $\square$

На самом деле мы доказали целочисленный результат: элементы $y_i \in \Omega^{SU}$, описанные в теореме 2, могут быть представлены целочисленными линейными комбинациями классов бордизмов многообразий Калаби-Яу N_ω. Элемент y_i является частью базиса абелевой группы Ω^{SU}_{2i}. Возникает следующий вопрос:

Какие классы бордизмов из Ω^{SU} могут быть представлены многообразиями Калаби-Яу?

Этот вопрос является SU-аналогом следующей хорошо известной проблемы Хирцебруха: какие классы бордизмов в Ω^U содержат связные (т. е. неприводимые) неособые алгебраические многообразия? Если опустить условие связности, то всякий класс U-бордизма положительной размерности представим алгебраическим многообразием. Для SU-бордизмов ситуация значительно сложнее.

Представимость образующих с помощью N_ω в старших размерностях

В комплексной размерности 2 мы имеем $s_2(N_{(1,1,1)}) = s_2(i_2) = g(3) = -48$, то есть неразложимый представитель класса SU бордизма образующей кольца представляется гиперповерхностью Калаби-Яу указанного вида (N_ω). Непосредственный подсчет указывает, что в размерностях 3 и 4 неразложимые представители не могут быть полученны из данной конструкции. Представимы ли неразложимые представители классов образующих кольца Ω^{SU}_{2i} с помощью N_ω? Ответ на этот вопрос даёт

Предложение 1. *Подмногообразие Калаби-Яу вида $N_{(\omega)}$ не может представлять неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}$ из теоремы 2 в комплексных размерностях, больших двух.*

Доказательство. Для того, чтобы многообразие предсталяло y_i, необходимо чтобы выполнялось

$$s_{n-1}(N_\omega) = \pm g(n)$$

Оценим $g(n)$, который определяется по формуле 1 (При $n > 3$):

$$0 \le g(n) \le 2m_{n-1}m_{n-2} \le 2n(n-1), \qquad \text{т.к. } m_i \le i+1$$

Для всех $\omega \in \widehat{P}(n)$ верна лемма 2. Рассмотрим для начала два оставшихся случая $\omega = (n)$ и $\omega = (1, n-1)$, найдем их s-числа:

$$s_{n-1}(N_{(n)}) = \left\langle (n+1)u \cdot (n+1)u^{n-1} - ((n+1)u)^n, [V] \right\rangle = (n+1)^2 - (n+1)^n$$

$$s_{n-1}(N_{(1,n-1)}) = \left\langle (2u_1 + nu_2)\left(2u_1^{n-1} + nu_2^{n-1}\right) - (2u_1+nu_2)^n, [V] \right\rangle = \\ \left\langle \left(2nu_1u_2^{n-1} - C_n^{1,n-1} 2u_1(nu_2)^{n-1} + \ (\text{..мономы не } u_1u_2^{n-1}\text{..})\right)\right\rangle = 2n - 2n^n$$

То есть

$$\left|s_{n-1}(N_{(n)})\right| = (n+1)^n - (n+1)^2 \qquad \left|s_{n-1}(N_{(1,n-1)})\right| = 2n^n - 2n$$

$$\left|s_{n-1}(N_{(n)})\right| - |g(n)| = (n+1)^n - (n+1)^2 - 2n(n-1) =$$
$$= (n+1)^n - n^2 - 2n - 1 - 2n^2 + 2n = (n+1)^n - 3n^2 - 1 > 0, \text{ при } n > 3$$

То есть $|g(n)| < \left|s_{n-1}(N_{(n)})\right|$.

$$\left|s_{n-1}(N_{(1,n-1)})\right| - |g(n)| = 2n^n - 2n - 2n(n-1) = 2n^n - 2n^2 > 0, \text{ при } n > 3$$

То есть $|g(n)| < \left|s_{n-1}(N_{(1,n-1)})\right|$.

И для них утверждение верно. Рассмотрим $\omega \in \widehat{P}(n)$:

В силу леммы 2 и формулы 2:

$$s_{n-1}(N_\omega) = -\alpha(\omega) = -C_n^{(i_1,\dots,i_k)}(i_1+1)^{i_1} + \dots + (i_k+1)^{i_k}$$

Так как $(i+j)! \geq i!j!$ (следует из целочисленности C_{i+j}^i), то

$$C_n^{(i_1,\cdots,i_p,\cdots,i_q,\cdots,i_k)} \geq C_n^{(i_1,\cdots,i_p+i_q,\cdots,\widehat{i_q},\cdots,i_k)}$$

$C_n^{(i_1,\dots,i_k)} \geq C_n^{(a,b)} \geq C_n^{(2,n-2)} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$,

(a, b - какие-то суммы чисел из разбиения, в частности $a + b = n$)

$k \geq 2$, а значит $(i_1+1)^{i_1} + \dots + (i_k+1)^{i_k} > 2 \cdot 2$ [0.1cm]

$$|s_{n-1}(N_\omega)| = \alpha(\omega) = C_n^{(i_1,\dots,i_k)}(i_1+1)^{i_1} + \dots + (i_k+1)^{i_k} >$$
$$> C_n^{(2,n-2)} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2n(n-1) \geq g(n)$$

А значит для всех разбиений ω при $n > 3$

$$|g(n)| < \left|s_{n-1}(N_{(n)})\right|$$

И только при $n = 3$ имеем $s_2(N_{(3)}) = s_2(N_{(1,1,1)}) = -48 = g(3)$. $\square$

Список литературы

[1] I. Y. Limonchenko, T. E. Panov, and G. S. Chernykh, "-bordism: structure results and geometric representatives," *Russian Mathematical Surveys*, vol. 74, no. 3, pp. 461–524, jun 2019. [Online]. Available: https://doi.org/10.1070%2Frm9883