

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
магистра

**Кольца когомологий момент-угол многообразий,
соответствующих срезанным кубам**

Выполнил студент
группы М2
Хрулев Руслан Александрович

подпись студента

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

подпись научного руководителя

Москва
2022

Содержание

1. Введение	3
2. Момент-угол многообразия, соответствующее многограннику	5
3. Кольцо когомологий момент-угол многообразия	7
4. Момент-угол многообразия усечённых кубов и их кольца когомологий	9
5. Заключение	23
Список литературы	24

1. Введение

Определение 1.1. Пусть \mathcal{K} — симплициальный комплекс на $[m]$. Тогда *комплексное момент-угол многообразие* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — это подпространство в единичном полидиске

$$\mathbb{D}^m = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i|^2 \leq 1, i = 1, \dots, m\},$$

определяемое следующим образом:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1 \right).$$

Также заметим, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ входит в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} & \xrightarrow{i_z} & \mathbb{D}^m \\ \downarrow \rho & & \downarrow \mu \\ cc(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{I}^m \end{array} \quad (1.1)$$

$$\mu : (z_1, \dots, z_m) \mapsto (|z_1|, \dots, |z_m|),$$

где $cc(\mathcal{K})$ — подкомплекс куба \mathbb{I}^m , соответствующий \mathcal{K} , см. [1].

Оказывается, что описание явного вида момент-угол многообразия является сложным вопросом. Это определение скрывает за собой достаточно сложно устроенное топологическое пространство. Для того чтобы определить гомотопический тип момент-угол многообразия или классифицировать многообразия с точностью до диффео-/гомеоморфизма, нужно развивать соответствующие техники.

Мы дальше увидим, что при достаточно малом изменении комбинаторной структуры симплициального комплекса, топологическая структура может сильно усложниться. Появляется интересная задача, которая заключается в поиске свойств момент-угол многообразий, полученных совершением какой-нибудь конкретной операции к исходному симплициальному комплексу, и в наблюдении взаимосвязи между топологиями этих двух момент-угол многообразий.

Для того чтобы выбрать эти операции, мы определим момент-угол комплекс для многогранника. Тогда имеется естественная операция для многогранника: срезка части многогранника плоскостью. Примерами этой операции может служить срезка вершины, ребра или грани многогранника.

В данной работе в качестве исходного многогранника мы рассмотрим трёхмерный куб. Далее будем исследовать топологию момент-угол многообразий, получившихся применением конечного числа приведённой выше операции.

Целью данной работы будет исследование топологии этих момент-угол многообразий, основанное на вычислении их колец когомологий.

В работе будут использоваться разные методы вычисления колец когомологий момент-угол многообразий, которые будут в нужный момент дополнять друг друга. А именно будут использованы следующие методы: формула Хохстера и резольвента Кошуля [1], аналог формулы Хохстера для гомологий [2].

В работе решаются следующие задачи:

1. Построить конкретные примеры усечённых кубов, для момент-угол многообразий которых получается интересная топологическая структура.
2. Посчитать кольцо когомологий момент-угол многообразий, соответствующих этим примерам.
3. Найти свойства этих момент-угол многообразий и выяснить взаимосвязь топологии момент-угол многообразий до проведения операции срезки и после.

2. Момент-угол многообразиие, соответствующее многограннику

Пусть многогранник P задан системой неравенств в \mathbb{R}^n :

$$(x, a_i) + b_i \geq 0, \quad x, a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1 \dots m.$$

Пусть A — матрица размера $n \times m$, столбцами которой являются вектора a_i , и b — вектор-столбец, состоящий из b_i . Тогда P можно отождествить с пересечением положительного ортанта \mathbb{R}_{\geq}^m и образа вложения

$$i_{A,b} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad i_{A,b}(x) = A^t x + b.$$

Определение 2.1. Момент-угол многообразиием \mathcal{Z}_P , соответствующим многограннику P , называется топологическое пространство, определяемое из коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \xrightarrow{i_z} & \mathbb{C}^m \\ \downarrow \rho & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_{A,b}} & \mathbb{R}_{\geq}^m \end{array} \quad (2.1)$$

где $\mu : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}^m$ — отображение такое, что $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$.

То есть, на самом деле, \mathcal{Z}_P — это прообраз многогранника P при проекции \mathbb{C}^m на пространство орбит покоординатного действия m -мерного тора. Таким образом, на \mathcal{Z}_P есть естественное действие тора, пространство орбит которого отождествляется с многогранником P .

Определение 2.2. Матрица Γ размерности $(m - n) \times m$ максимального ранга называется матрицей преобразования Гейла набора a_1, \dots, a_m , если

$$\Gamma A^t = 0.$$

Пусть $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ — матрица преобразования Гейла. Обозначим $y = A^t x + b$. Тогда

$$\Gamma y = \Gamma(A^t x + b) = \Gamma b.$$

Из коммутативной диаграммы видим, что:

$$i_{A,b}(\mathbb{R}^n) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \Gamma y = \Gamma b\}$$

Тогда получаем, что

$$i_z(\mathcal{Z}_P) = \{z \in \mathbb{C}^m \mid \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^m \gamma_{jk} b_k, \quad j = 1, \dots, m - n\}. \quad (2.2)$$

Другими словами, момент-угол многообразиие \mathcal{Z}_P задаётся системой уравнений (2.2). Попробуем привести нашу систему уравнений к более удобному виду. Заметим также, что матрица Γ показывает, каким линейным зависимостям удовлетворяют столбцы матрицы A . Можно так переименовать a_i , что они будут удовлетворять соотношению $\sum_{i=1}^m a_i = 0$.

Это соотношение мы и возьмём в качестве последней строки матрицы Γ . Тогда уравнения будут выглядеть так:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m \gamma_{1k} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^m \gamma_{1k} b_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^m \gamma_{(m-n-1)k} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^m \gamma_{(m-n-1)k} b_k \\ \sum_{i=1}^m |z_i|^2 = s \end{cases}$$

Можно считать, что $s > 0$, так как иначе множество, задаваемое системой, будет точкой или пустым множеством. Тогда, вычитая последнее уравнение, можно добиться того, что свободные коэффициенты уйдут. Тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m C_i |z_i|^2 = 0, & C_i \in \mathbb{R}^{m-n-1} \\ \sum_{i=1}^m |z_i|^2 = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Напомним, что n -мерный многогранник P называется *простым*, если каждая вершина содержится в точности в n гипергранях. Будем далее обозначать \mathcal{K}_P симплициальный комплекс, двойственный к границе простого многогранника P . Другими словами, если F_1, \dots, F_m — грани коразмерности 1 в многограннике P , то

$$\mathcal{K}_P = \{ \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq [m] : F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset \}.$$

Предложение 2.1 (Theorem 6.2.4, [1]). $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является клеточным комплексом. Если $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ для простого P , то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P}$ является гладким многообразием.

Пример . Рассмотрим в качестве многогранника P трёхмерный куб и выясним топологию его момент-угол многообразия. Куб задан следующей системой неравенств. Получаем явный вид матриц A и b .

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ -x_1 + 1 \geq 0 \\ -x_2 + 1 \geq 0 \\ -x_3 + 1 \geq 0 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем явный вид матрицы преобразования Гейла Γ и столбца Γb

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из (2.2) получаем момент-угол многообразие, соответствующее кубу, заданно пересечением эрмитовых квадратиков

$$\begin{cases} |z_1|^2 + |z_4|^2 = 1 \\ |z_2|^2 + |z_5|^2 = 1 \\ |z_3|^2 + |z_6|^2 = 1 \end{cases},$$

которое, очевидным образом, представляет из себя тройное произведение трёхмерных сфер, то есть

$$\mathcal{L}_P = S^3 \times S^3 \times S^3.$$

Видим, что топология момент-угол многообразия, соответствующего кубу, несложная и найти её не составило большого труда.

Предложение 2.2. Пусть P и Q — два многогранника. Тогда

$$\mathcal{L}_{P \times Q} = \mathcal{L}_P \times \mathcal{L}_Q.$$

Доказательство. В качестве матрицы $\Gamma_{P \times Q}$, строки которой образуют базис линейных соотношений матрицы $A_{P \times Q}$, может быть выбрана блочная матрица

$$\begin{pmatrix} \Gamma_P & 0 \\ 0 & \Gamma_Q \end{pmatrix}.$$

Тогда система квадратик, задающая $\mathcal{L}_{P \times Q}$, распадается на две независимые системы, каждая из которых определяет \mathcal{L}_P и \mathcal{L}_Q соответственно. \square

Отметим также, что найти момент-угол многообразие, соответствующее кубу, можно было с помощью этого предложения.

3. Кольцо когомологий момент-угол многообразия

Чтобы получить информацию о топологии момент-угол многообразия, мы будем считать его кольцо когомологий. Пусть $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ — симплекс, причём $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Рассмотрим алгебру многочленов $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ и внешнюю алгебру $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$. Обозначим $v_I = v_{i_1} \dots v_{i_k}$ и $u_I = u_{i_1} \dots u_{i_k}$ — мономы в соответствующих алгебрах.

Определение 3.1. Кольцо граней симплицеального комплекса \mathcal{K} на множестве $[m]$ называется факторкольцо алгебры многочленов по идеалу, который порождён несоответствующими симплексам в \mathcal{K} мономами. То есть

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / \mathcal{I}_{\mathcal{K}},$$

где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = (v_I : I \notin \mathcal{K})$ — идеал.

Рассмотрим фактор-алгебру

$$R^*(\mathcal{K}) = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}] / (v_i^2 = u_i v_i = 0, 1 \leq i \leq m). \quad (3.1)$$

Тогда $R^*(\mathcal{K})$ — это биградуированная дифференциальная алгебра с аддитивным базисом $\{u_J v_I\}$, где $I \in \mathcal{K}$, $J \subseteq [m]$, $I \cap J = \emptyset$,

$$\text{bideg } u_i = (-1, 2), \text{ bideg } v_i = (0, 2), \text{ du}_i = v_i, \text{ dv}_i = 0.$$

Теорема 3.1 (Lemma 4.5.3, [1]). Пусть $C^*(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$ — алгебра клеточных коцепей с естественным умножением, которое индуцирует стандартное произведение в когомологиях. Тогда имеем изоморфизм алгебр:

$$R^*(\mathcal{K}) \cong C^*(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}).$$

В алгебре $R^*(\mathcal{K})$ можно рассмотреть мультиградуировку:

$$mdeg u_i = (-1, 2e_i), \quad mdeg v_i = (0, 2e_i),$$

где $e_i, i = 1, \dots, m$ — элементы стандартного базиса в \mathbb{Z}^m .

Пусть $J \subseteq [m]$. Полным подкомплексом \mathcal{K}_J симплицеального комплекса \mathcal{K} будем называть подкомплекс следующего вида:

$$\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} : I \subseteq J\}.$$

Для всех \mathcal{K}_J рассмотрим комплекс симплицеальных коцепей $(C^*(\mathcal{K}_J), d)$. Группа $C^p(\mathcal{K}_J)$ является свободной абелевой группой с базисом χ_L , где χ_L — характеристическая функция симплекса $L \in \mathcal{K}_J, |L| = p + 1$.

Теорема 3.2 (Theorem 3.2.4, [1]). Имеет место изоморфизм коцепных комплексов $(C^*(\mathcal{K}_J), d)$ и $(R^{* \dashv |J|+1, 2J}(\mathcal{K}), d)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{d} & C^0(\mathcal{K}_J) & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} C^{p-1}(\mathcal{K}_J) \xrightarrow{d} \dots \\ & & \downarrow f_{-1} \cong & & \downarrow f_0 \cong & & \downarrow f_{p-1} \cong \\ 0 & \longrightarrow & R^{\dashv |J|, 2J} & \xrightarrow{d} & R^{\dashv |J|+1, 2J} & \xrightarrow{d} & \dots \xrightarrow{d} R^{\dashv |J|+p, 2J} \xrightarrow{d} \dots \end{array}$$

где $f_p(\chi_L) = \varepsilon(L, J)u_{J \setminus L}v_L$, $\varepsilon(L, J)$ — некоторый знак.

То есть мы получили изоморфизм дифференциальных градуированных алгебр, которыми мы будем пользоваться далее:

$$C^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong R^*(\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{p \geq 0, J \subseteq [m]} C^{p-1}(\mathcal{K}_J), \quad (3.2)$$

и изоморфизм их когомологий:

$$H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^*(\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{p \geq 0, J \subseteq [m]} H^{p-1}(\mathcal{K}_J).$$

Теорема 3.3 (Proposition 3.2.10, [1]). Произведение на $\bigoplus_{p \geq 0, J \subseteq [m]} C^{p-1}(\mathcal{K}_J)$, которое индуцировано из алгебры $R^*(\mathcal{K})$, совпадает с точностью до знака с произведением, которое индуцировано отображениями

$$\begin{aligned} \sigma : C^{p-1}(\mathcal{K}_I) \times C^{q-1}(\mathcal{K}_J) &\rightarrow C^{p+q-1}(\mathcal{K}_{I \sqcup J}), \\ (\chi_L, \chi_N) &\mapsto \begin{cases} \chi_{L \sqcup N}, & \text{если } I \cap J = \emptyset, L \sqcup N \in \mathcal{K}_{I \sqcup J} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим ещё один аналог вычисления кольца когомологий момент-угол многообразия \mathcal{Z}_P , соответствующего многограннику P , который представлен в работе [2]. Он удобен тем, что позволяет считать кольцо когомологий момент-угол многообразия через гомологии объединения граней данного многогранника.

Пусть размерность многогранника P равна d , количество граней P равно n . Будем обозначать \mathcal{F} — множество граней P , \mathcal{I} — подмножество \mathcal{F} , $\bar{\mathcal{I}}$ — дополнение к \mathcal{I} в \mathcal{F} , $P_{\bar{\mathcal{I}}}$ — объединение граней P , которые лежат в $\bar{\mathcal{I}}$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3.4 (Theorem 7.6, [2]). Имеет место следующий изоморфизм:

$$H^i(\mathcal{L}_P, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}_{d+|\bar{\mathcal{I}}|-i-1}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}). \quad (3.3)$$

Обозначим $\psi([c])$ — обратный образ этого изоморфизма класса $[c]$ в любом слагаемом правого члена. Пусть $[c] \in \tilde{H}_k(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z})$ и $[c'] \in \tilde{H}_{k'}(P_{\mathcal{J}}, \mathbb{Z})$. Тогда $[c] \cap [c']$ — их класс пересечения в $\tilde{H}_{k+k'-d+1}(P_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}}, \mathbb{Z})$. Тогда с точностью до знака произведение в когомологиях определяется следующим образом:

$$\psi([c]) \smile \psi([c']) = \begin{cases} \psi([c] \cap [c']), & \text{если } \mathcal{I} \cup \mathcal{J} = \mathcal{F} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Отметим, что в этой работе будут вычисляться кольца когомологий с точностью до знака.

4. Момент-угол многообразия усечённых кубов и их кольца когомологий

В этом разделе мы будем рассматривать многогранники, которые получаются при отсечении плоскостью части трёхмерного куба, и будем изучать свойства момент-угол многообразий этих многогранников. Отметим для начала утверждение, которым мы будем дальше пользоваться.

Предложение 4.1 (Corollary 11.1, [2]). Если многогранник P имеет размерность не более 4, тогда группы когомологий соответствующего момент-угол многообразия являются свободными.

Рассмотрим многогранник C_v , который получается при отсечении вершины куба. Обозначим его грани следующим образом: 0 — новая грань, получившаяся при отсечении вершины, 1 — передняя грань, 2 — правая грань, 3 — верхняя грань и 1', 2', 3' — грани, противоположные к граням 1, 2, 3 соответственно.

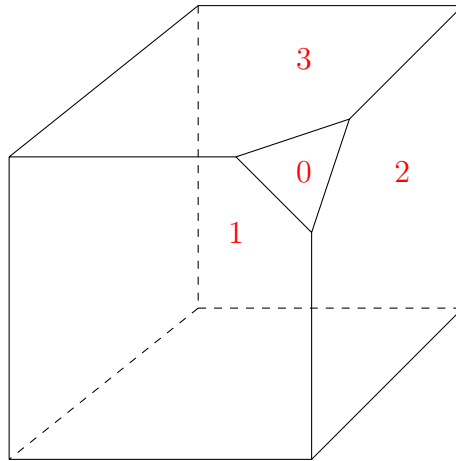


Рис. 1 Куб с усечённой вершиной

Посчитаем кольцо когомологий момент-угол многообразия, соответствующего этому усечённому кубу. Для удобства запишем данные, которые мы имеем, в таблицу. А именно: объединение граней $P_{\mathcal{I}}$, которые не являются гомотопически эквивалентными точке, соответствующие им порождающие классы приведённых гомологий $[c]$ и их гомотопический тип.

$ \mathcal{I} $	$P_{\mathcal{I}} \rightarrow [c]$	Гомотопический тип
2	$P_{\{1,1'\}} \rightarrow [c_1], P_{\{2,2'\}} \rightarrow [c_2], P_{\{3,3'\}} \rightarrow [c_3], P_{\{0,1'\}} \rightarrow [\alpha_{1'}],$ $P_{\{0,2'\}} \rightarrow [\alpha_{2'}], P_{\{0,3'\}} \rightarrow [\alpha_{3'}]$	Пара точек
3	$P_{\{0,1',2'\}} \rightarrow [\alpha_{1'2'}], P_{\{0,1',3'\}} \rightarrow [\alpha_{1'3'}], P_{\{0,2',3'\}} \rightarrow [\alpha_{2'3'}],$ $P_{\{0,1,1'\}} \rightarrow [c_{10}], P_{\{0,2,2'\}} \rightarrow [c_{20}], P_{\{0,3,3'\}} \rightarrow [c_{30}]$	Пара точек
	$P_{\{1,2,3\}} \rightarrow [\mu]$	Окружность
4	$P_{\{0,1',2',3'\}} \rightarrow [\alpha_{1'2'3'}]$	Пара точек
	$P_{\{1,2,1',2'\}} \rightarrow [c_{12}], P_{\{1,3,1',3'\}} \rightarrow [c_{13}], P_{\{2,3,2',3'\}} \rightarrow [c_{23}],$ $P_{\{1,2,3,1'\}} \rightarrow [\mu_{1'}], P_{\{1,2,3,2'\}} \rightarrow [\mu_{2'}], P_{\{1,2,3,3'\}} \rightarrow [\mu_{3'}]$	Окружность
5	$P_{\{1,0,2,1',2'\}} \rightarrow [\lambda_{12}], P_{\{1,0,3,1',3'\}} \rightarrow [\lambda_{13}], P_{\{2,0,3,2',3'\}} \rightarrow [\lambda_{23}],$ $P_{\{1,2,3,1',2'\}} \rightarrow [\mu_{1'2'}], P_{\{1,2,3,1',3'\}} \rightarrow [\mu_{1'3'}], P_{\{1,2,3,2',3'\}} \rightarrow [\mu_{2'3'}]$	Окружность

Отметим сразу, что некоторые группы когомологий тривиальным образом вытекают из формулы (3.3):

$$H^0(\mathcal{Z}_P) \cong \bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}_{2+|\bar{\mathcal{I}}|}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_2(\partial C_v, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_2(S^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

$$H^{10}(\mathcal{Z}_P) \cong \bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}_{|\bar{\mathcal{I}}|-8}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_{-1}(\emptyset, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

$$H^1(\mathcal{Z}_P) \cong \bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}_{1+|\bar{\mathcal{I}}|}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_1(\partial C_v, \mathbb{Z}) \cong 0,$$

$$H^2(\mathcal{Z}_P) \cong \bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}_{|\bar{\mathcal{I}}|}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_0(\partial C_v, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{i_1, \dots, i_6\}}, \mathbb{Z}) \cong 0.$$

Аналогично вычислению последних двух групп когомологий получаем:

$$H^8(\mathcal{Z}_P) \cong 0,$$

$$H^9(\mathcal{Z}_P) \cong 0.$$

Теперь, пользуясь таблицей, вычислим группы когомологий оставшихся размерностей:

$$H^3(\mathcal{Z}_P) \cong \bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}_{|\bar{\mathcal{I}}|-1}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_1(P_{\{1,0,2,1',2'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{1,0,3,1',3'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{2,0,3,2',3'\}}, \mathbb{Z}) \oplus$$

$$\oplus \tilde{H}_1(P_{\{1,2,3,1',2'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{1,2,3,1',3'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{1,2,3,2',3'\}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^6,$$

$$H^4(\mathcal{Z}_P) \cong \bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}_{|\bar{\mathcal{I}}|-2}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_1(P_{\{1,2,1',2'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{1,3,1',3'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{2,3,2',3'\}}, \mathbb{Z}) \oplus$$

$$\oplus \tilde{H}_1(P_{\{1,2,3,1'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{1,2,3,2'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{1,2,3,3'\}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^6,$$

$$H^5(\mathcal{Z}_P) \cong \bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}_{|\bar{\mathcal{I}}|-3}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_0(P_{\{0,1',2',3'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_1(P_{\{1,2,3\}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2,$$

$$H^6(\mathcal{Z}_P) \cong \bigoplus_{\mathcal{I} \subset \mathcal{F}} \tilde{H}_{|\bar{\mathcal{I}}|-4}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_0(P_{\{0,1',2'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_0(P_{\{0,1',3'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_0(P_{\{0,2',3'\}}, \mathbb{Z}) \oplus$$

$$\oplus \tilde{H}_0(P_{\{0,1,1'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_0(P_{\{0,2,2'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_0(P_{\{0,3,3'\}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^6,$$

$$H^7(\mathcal{Z}_P) \cong \bigoplus_{\mathcal{ICF}} \tilde{H}_{|\mathcal{I}|-5}(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_0(P_{\{1,1'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_0(P_{\{2,2'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_0(P_{\{3,3'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \\ \oplus \tilde{H}_0(P_{\{0,1'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_0(P_{\{0,2'\}}, \mathbb{Z}) \oplus \tilde{H}_0(P_{\{0,3'\}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^6.$$

Пусть $b^i(\mathcal{Z}_P)$ — i -е число Бетти момент-угол многообразия \mathcal{Z}_P . Тогда мы получаем, что

$$(b^0(\mathcal{Z}_P), b^1(\mathcal{Z}_P), \dots, b^{10}(\mathcal{Z}_P)) = (1, 0, 0, 6, 6, 2, 6, 6, 0, 0, 1).$$

Оформим полученные данные о группах когомологий в месте с порождающими в виде таблицы:

i	$H^i(\mathcal{Z}_P, \mathbb{Z})$
1, 2, 8, 9	$\{0\}$
3	$\mathbb{Z} \cdot \psi([\lambda_{12}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\lambda_{13}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\lambda_{23}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\mu_{1'2'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\mu_{2'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\mu_{1'3'}])$
4	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c_{12}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{13}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{23}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\mu_{1'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\mu_{2'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\mu_{3'}])$
5	$\mathbb{Z} \cdot \psi([\alpha_{1'2'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\mu])$
6	$\mathbb{Z} \cdot \psi([\alpha_{1'2'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\alpha_{1'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\alpha_{2'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{10}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{20}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{30}])$
7	$\mathbb{Z} \cdot \psi([\alpha_{1'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\alpha_{2'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([\alpha_{3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_1]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_2]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_3])$
10	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c])$

Предложение 4.2 (Теорема 6.9, [3]). Группы когомологий произведения сфер имеют следующий вид:

$$H^i(S^{n_1} \times S^{n_2} \times \dots \times S^{n_k}) \cong \mathbb{Z}^{\#\{n_{i_1} \leq \dots \leq n_{i_p} : n_{i_1} + \dots + n_{i_p} = i\}}.$$

Предложение 4.3. Пусть M_1 и M_2 — замкнутые, связные, ориентируемые многообразия размерности n . Тогда

$$H^i(M_1 \# M_2) \cong H^i(M_1) \oplus H^i(M_2), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Доказательство. Имеет место точная когомологическая последовательность Майера-Виеториса

$$\dots \rightarrow H^i(M_1 \# M_2) \rightarrow H^i(M_1 \setminus D^n) \oplus H^i(M_2 \setminus D^n) \rightarrow H^i(S^{n-1}) \rightarrow H^{i-1}(M_1 \# M_2) \rightarrow \dots$$

Учитывая то, что $H^i(M_1 \setminus D^n) \cong H^i(M_1)$ и $H^i(M_2 \setminus D^n) \cong H^i(M_2)$ для $i \in \{1, \dots, n-1\}$, получаем тот изоморфизм, который хотели доказать. \square

Обозначим $X^{\#k}$ — связную сумму k копий пространства X . Пользуясь этими предложениями, мы получаем, что числа Бетти для связной суммы произведения сфер

$$(S^3 \times S^3 \times S^4)^{\#3} \# (S^4 \times S^6)^{\#3} \# (S^5 \times S^5)$$

имеют следующий вид:

$$(\tilde{b}^0, \dots, \tilde{b}^{10}) = (1, 0, 0, 6, 6, 2, 6, 6, 0, 0, 1).$$

То есть мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.4. Имеет место изоморфизм групп когомологий:

$$H^i(\mathcal{Z}_P, \mathbb{Z}) \cong H^i((S^3 \times S^3 \times S^4)^{\#3} \# (S^4 \times S^6)^{\#3} \# (S^5 \times S^5), \mathbb{Z}) \quad \forall i,$$

где многогранник $P = C_v$ — куб, с усечённой вершиной.

Далее, конечно же, возникает следующее предположение: если совпадают все группы когомологий, то возможно и пространства совпадают

$$\mathcal{Z}_P = (S^3 \times S^3 \times S^4)^{\#3} \# (S^4 \times S^6)^{\#3} \# (S^5 \times S^5).$$

Чтобы разобраться с этим предположением, посчитаем кольцо когомологий момент-угол многообразия. По теореме 3.4 нетривиальные произведения в когомологиях $\psi([c]) \smile \psi([c'])$ будут давать те классы, для которых выполнены следующие условия:

1. Прообразы $[c] \in \tilde{H}_k(P_{\mathcal{I}}, \mathbb{Z})$ и $[c'] \in \tilde{H}_{k'}(P_{\mathcal{J}}, \mathbb{Z})$ порождаются такими гранями $P_{\mathcal{I}}$ и $P_{\mathcal{J}}$, что $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} = \mathcal{F}$;
2. $P_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}}$ — гомотопически не эквивалентно точке;
3. Если $P_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} \simeq pt \sqcup pt$, то $k + k' = 2$;
4. Если $P_{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} = \emptyset$, то $k + k' = 1$.

Обозначим $\psi([c]) \in H^{10}(\mathcal{Z}_P)$ — единственную порождающую высшей размерности. Тогда имеем следующие нетривиальные произведения:

$$H^3 \times H^3 : \begin{cases} \psi([\lambda_{12}]) \smile \psi([\lambda_{13}]) = \psi([c_{10}]) \\ \psi([\lambda_{12}]) \smile \psi([\lambda_{23}]) = \psi([c_{20}]) \\ \psi([\lambda_{13}]) \smile \psi([\lambda_{23}]) = \psi([c_{30}]) \end{cases} \quad H^3 \times H^4 : \begin{cases} \psi([\lambda_{12}]) \smile \psi([c_{13}]) = \psi([c_1]) \\ \psi([\lambda_{12}]) \smile \psi([c_{23}]) = \psi([c_2]) \\ \psi([\lambda_{13}]) \smile \psi([c_{12}]) = \psi([c_1]) \\ \psi([\lambda_{13}]) \smile \psi([c_{23}]) = \psi([c_3]) \\ \psi([\lambda_{23}]) \smile \psi([c_{12}]) = \psi([c_2]) \\ \psi([\lambda_{23}]) \smile \psi([c_{13}]) = \psi([c_3]) \end{cases}$$

$$H^5 \times H^5 : \psi([\alpha_{1'2'3'}]) \smile \psi([\mu]) = \psi([c])$$

$$H^6 \times H^4 : \begin{cases} \psi([c_{12}]) \smile \psi([c_{30}]) = \psi([c]) \\ \psi([c_{13}]) \smile \psi([c_{20}]) = \psi([c]) \\ \psi([c_{23}]) \smile \psi([c_{10}]) = \psi([c]) \\ \psi([\alpha_{1'2'}]) \smile \psi([\mu_{3'}]) = \psi([c]) \\ \psi([\alpha_{1'3'}]) \smile \psi([\mu_{2'}]) = \psi([c]) \\ \psi([\alpha_{2'3'}]) \smile \psi([\mu_{1'}]) = \psi([c]) \end{cases} \quad H^7 \times H^3 : \begin{cases} \psi([c_1]) \smile \psi([\lambda_{23}]) = \psi([c]) \\ \psi([c_2]) \smile \psi([\lambda_{13}]) = \psi([c]) \\ \psi([c_3]) \smile \psi([\lambda_{12}]) = \psi([c]) \\ \psi([\mu_{1'2'}]) \smile \psi([\alpha_{3'}]) = \psi([c]) \\ \psi([\mu_{1'3'}]) \smile \psi([\alpha_{2'}]) = \psi([c]) \\ \psi([\mu_{2'3'}]) \smile \psi([\alpha_{1'}]) = \psi([c]) \end{cases}$$

Получили полное описание кольца когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P)$ момент-угол многообразия, соответствующего кубу с усечённой вершиной.

Теперь покажем, что на самом деле $\mathcal{Z}_P \not\cong (S^3 \times S^3 \times S^4)^{\#3} \# (S^4 \times S^6)^{\#3} \# (S^5 \times S^5)$. Докажем даже более сильное утверждение.

Теорема 4.5. Момент-угол многообразия, соответствующее кубу с усечённой вершиной, не гомотопически эквивалентен никакой связной сумме произведений сфер.

Доказательство. Посмотрим внимательнее на кольцо когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P)$. Заметим, что следующие классы

$$\begin{aligned} \psi([\lambda_{12}]), \psi([\lambda_{13}]), \psi([\lambda_{23}]) &\in H^3(\mathcal{Z}_P); \quad \psi([c_{12}]), \psi([c_{13}]), \psi([c_{23}]) \in H^4(\mathcal{Z}_P); \\ \psi([c_{10}]), \psi([c_{20}]), \psi([c_{30}]) &\in H^6(\mathcal{Z}_P); \quad \psi([c_1]), \psi([c_2]), \psi([c_3]) \in H^7(\mathcal{Z}_P); \quad [c] \in H^{10}(\mathcal{Z}_P) \end{aligned}$$

связаны нетривиальными произведениями.

Допустим противное, то есть наше момент-угол многообразие гомотопически эквивалентно связной сумме произведений сфер. Так как нетривиальные произведения получаются только из образующих, сферы которых лежат в одном связном слагаемом, и когомологическая длина нашего кольца равна 3, то в этом связном слагаемом должно быть ровно 3 сферы. Но тогда из описания кольца мы видим, что сюда не могут попасть все порождающие, которые связаны нетривиальными произведениями. То есть они лежат в других связных компонентах. Получили противоречие. \square

В итоге мы видим, что при такой простой операции над кубом как отсечение вершины, топология соответствующего ему момент-угол многообразия сильно усложняется. Но всё же эта операция имеет хорошее свойство.

Предложение 4.6 (Remarks, [4]). Пусть P — многогранник и P_v — многогранник, у которого отсекли вершину. Заметим, что комбинаторный тип многогранника P_v зависит от того, какую вершину мы срезаем. Оказывается, что момент-угол многообразия, с точностью до диффеоморфизма, не зависит от того, какую вершину мы срезаем.

Это утверждение порождает много примеров различных многогранников, у которых одинаковые момент-угол многообразия.

Рассмотрим следующий пример усечённого куба. Сечение и получившийся многогранник показаны на Рис. 2.

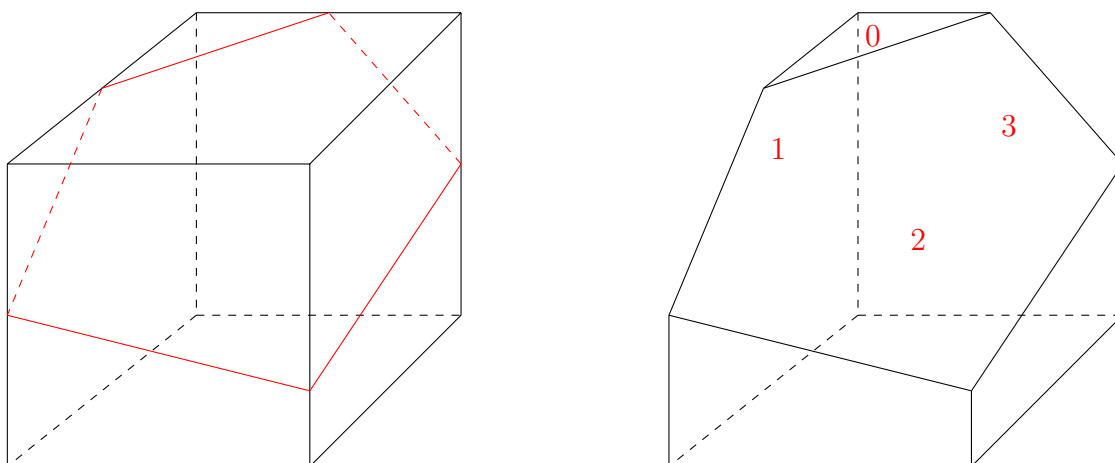


Рис. 2 Усечённый куб, сечением которого является пятиугольник

Грани получившегося многогранник обозначим следующим образом: 0 — верхняя треугольная грань, 1, 2, 3 — левая, передняя и правая пятиугольные грани, 1', 3' — четырёхугольные грани, которые лежат напротив граней 1, 3 соответственно, 2' — оставшаяся четырёхугольная грань.

Предложение 4.7. Построенный усечённый куб, сечением которого является пятиугольник, комбинаторно эквивалентен кубу с усечённой вершиной.

Доказательство. Сопоставим i -ю грань куба с усечённой вершиной с i -й гранью нового усечённого куба в обозначениях, которые мы ввели ранее, где $i \in \{0, 1, 2, 3, 1', 2', 3'\}$. Тогда видим совпадение вершин, рёбер и граней. \square

Из этого предложения сразу же следует, что у этих многогранников одинаковые момент-угол многообразия.

На Рис. 3 показано сечение куба и многогранник, который получается при этом отсечении части куба. Это наш следующий пример.

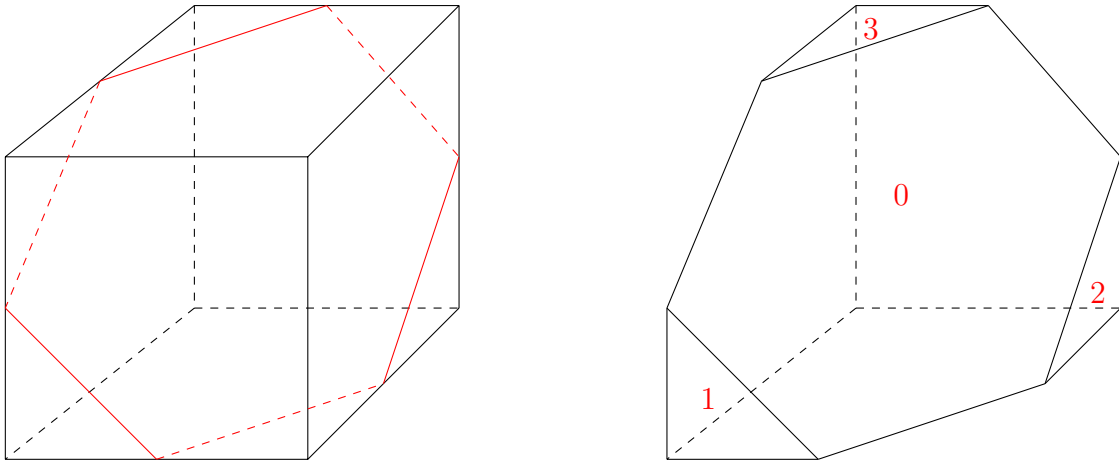


Рис. 3 Усечённый куб, сечением которого является шестиугольник

Обозначим его грани следующим образом: 0 — новая шестиугольная грань, 1, 2, 3 — треугольные грани, отмеченные на рисунке, 1', 2', 3' — пятиугольные грани, противоположные треугольным граням 1, 2, 3 соответственно. Опишем кольцо когомологий момент-угол многообразия, соответствующего этому многограннику.

$ \mathcal{I} $	$P_{\mathcal{I}} \rightarrow [c]$	Гомотопический тип
2	$P_{\{1,1'\}} \rightarrow [c_1], P_{\{2,2'\}} \rightarrow [c_2], P_{\{3,3'\}} \rightarrow [c_3], P_{\{1,2\}} \rightarrow [a_{12}], P_{\{1,3\}} \rightarrow [a_{13}], P_{\{2,3\}} \rightarrow [a_{23}]$	Пара точек
3	$P_{\{1,1',3\}} \rightarrow [c_{13}], P_{\{1,1',2\}} \rightarrow [c_{12}], P_{\{2,2',1\}} \rightarrow [c_{21}], P_{\{2,2',3\}} \rightarrow [c_{23}], P_{\{3,3',1\}} \rightarrow [c_{31}], P_{\{3,3',2\}} \rightarrow [c_{32}]$	Пара точек
	$P_{\{0,2',3'\}} \rightarrow [d_{2'3'}], P_{\{0,1',3'\}} \rightarrow [d_{1'3'}], P_{\{0,1',2'\}} \rightarrow [d_{1'2'}]$	Окружность
	$P_{\{1,2,3\}} \rightarrow [h_1], [h_2]$	Три точки
4	$P_{\{0,1',2',3'\}} \rightarrow [g_1], [g_2]$	Букет двух окружностей
	$P_{\{1,1',3,2\}} \rightarrow [c_{132}], P_{\{2,2',3,1\}} \rightarrow [c_{231}], P_{\{3,3',1,2\}} \rightarrow [c_{312}]$	Пара точек
	$P_{\{0,2',3',3\}} \rightarrow [d_{2'3'3}], P_{\{0,2',3',2\}} \rightarrow [d_{2'3'2}], P_{\{0,1',3',1\}} \rightarrow [d_{1'3'1}], P_{\{0,1',3',3\}} \rightarrow [d_{1'3'3}], P_{\{0,1,2',1'\}} \rightarrow [d_{1'2'1}], P_{\{0,2,1',2'\}} \rightarrow [d_{1'2'2}]$	Окружность
5	$P_{\{0,3,1',2',3'\}} \rightarrow [f_3], P_{\{0,2,1',2',3'\}} \rightarrow [f_2], P_{\{0,1,1',2',3'\}} \rightarrow [f_1], P_{\{0,2,3,2',3'\}} \rightarrow [e_1], P_{\{0,1,3,1',3'\}} \rightarrow [e_2], P_{\{0,1,2,1',2'\}} \rightarrow [e_3]$	Окружность

Аналогичным образом, как и в первом примере, вычисляя группы когомологий, получаем:

i	$H^i(\mathcal{X}_P, \mathbb{Z})$
1, 2, 8, 9	$\{0\}$
3	$\mathbb{Z} \cdot \psi([f_1]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([f_2]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([f_3]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_1]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_2]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_3])$
4	$\mathbb{Z} \cdot \psi([d_{1'2'1}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([d_{1'2'2}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([d_{1'3'1}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([d_{1'3'3}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([d_{2'3'2}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([d_{2'3'3}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([g_1]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([g_2])$
5	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c_{132}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{231}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{312}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([d_{1'2'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([d_{1'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([d_{2'3'}])$
6	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c_{12}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{13}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{21}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{23}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{31}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{32}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([h_1]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([h_2])$
7	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c_1]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_2]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_3]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([a_{12}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([a_{13}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([a_{23}])$
10	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c])$

$$(b^0(\mathcal{L}_P), b^1(\mathcal{L}_P), \dots, b^{10}(\mathcal{L}_P)) = (1, 0, 0, 6, 8, 6, 8, 6, 0, 0, 1).$$

Из предложений 4.2 и 4.3 получаем, что числа Бетти для связной суммы произведения сфер

$$(S^3 \times S^7)^{\#6} \# (S^4 \times S^6)^{\#8} \# (S^5 \times S^5)^{\#3}$$

имеют вид:

$$(\tilde{b}^0, \dots, \tilde{b}^{10}) = (1, 0, 0, 6, 8, 6, 8, 6, 0, 0, 1).$$

Теорема 4.8. Имеется следующий изоморфизм групп когомологий

$$H^i(\mathcal{L}_P, \mathbb{Z}) \cong H^i((S^3 \times S^7)^{\#6} \# (S^4 \times S^6)^{\#8} \# (S^5 \times S^5)^{\#3}, \mathbb{Z}) \quad \forall i,$$

где P — рассматриваемый в данном примере усечённый куб.

Теперь разберёмся с произведением в когомологиях данного момент-угол многообразия. Оказывается, что когомологическая длина его равна 2. Действительно, если бы было больше, то должно существовать нетривиальное произведение $H^3 \times H^3$ или $H^3 \times H^4$, так как $H^8(\mathcal{L}_P) = 0$. Непосредственная проверка руками показывает, что все такие произведения тривиальные. Например, для $\psi([f_3]) \smile \psi([e_3])$ получаем, что $P_{\{0,3,1',2',3'\}} \rightarrow [f_3]$ и $P_{\{0,1,2,1',2'\}} \rightarrow [e_3]$. Тогда видим, что

$$\{0, 1, 2, 1', 2'\} \cup \{0, 3, 1', 2', 3'\} = \mathcal{F}, \quad \{0, 1, 2, 1', 2'\} \cap \{0, 3, 1', 2', 3'\} = \{0, 1', 2'\},$$

но

$$\tilde{H}_{1+1-3+1}(P_{\{0,1',2'\}}, \mathbb{Z}) = \tilde{H}_0(S^1, \mathbb{Z}) = 0.$$

Выпишем нетривиальные произведения.

$$H^3 \times H^7 : \begin{cases} \psi([e_1]) \smile \psi([c_1]) = \psi([c]) \\ \psi([e_2]) \smile \psi([c_2]) = \psi([c]) \\ \psi([e_3]) \smile \psi([c_3]) = \psi([c]) \\ \psi([f_1]) \smile \psi([a_{23}]) = \psi([c]) \\ \psi([f_2]) \smile \psi([a_{13}]) = \psi([c]) \\ \psi([f_3]) \smile \psi([a_{12}]) = \psi([c]) \end{cases} \quad H^5 \times H^5 : \begin{cases} \psi([c_{132}]) \smile \psi([d_{2'3'}]) = \psi([c]) \\ \psi([c_{231}]) \smile \psi([d_{1'3'}]) = \psi([c]) \\ \psi([c_{312}]) \smile \psi([d_{1'2'}]) = \psi([c]) \end{cases}$$

$$H^4 \times H^6 : \begin{cases} \psi([d_{1'2'1}]) \smile \psi([c_{32}]) = \psi([c]) \\ \psi([d_{1'2'2}]) \smile \psi([c_{31}]) = \psi([c]) \\ \psi([d_{1'3'1}]) \smile \psi([c_{23}]) = \psi([c]) \\ \psi([d_{1'3'3}]) \smile \psi([c_{21}]) = \psi([c]) \\ \psi([d_{2'3'2}]) \smile \psi([c_{13}]) = \psi([c]) \\ \psi([d_{2'3'3}]) \smile \psi([c_{12}]) = \psi([c]) \\ \psi([g_1]) \smile \psi([h_1]) = \psi([c]) \\ \psi([g_2]) \smile \psi([h_2]) = \psi([c]) \end{cases}$$

Получили полное описание кольца когомологий данного момент-угол многообразия. Отметим, что для связной суммы произведения сфер $(S^3 \times S^7)^{\#6} \# (S^4 \times S^6)^{\#8} \# (S^5 \times S^5)^{\#3}$ произведения в кольце когомологий совпадают с произведениями в кольце когомологий рассматриваемого момент-угол многообразия. То есть мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.9. Имеет место следующий изоморфизм колец когомологий

$$H^*(\mathcal{L}_P, \mathbb{Z}) \cong H^*((S^3 \times S^7)^{\#6} \# (S^4 \times S^6)^{\#8} \# (S^5 \times S^5)^{\#3}, \mathbb{Z}),$$

где P — усечённый куб, сечением которого является шестиугольник.

Заметим, что в данном примере кольцо когомологий момент-угол многообразия совпало с кольцом когомологий связной суммы произведения сфер, в отличие от первого примера, где рассматривалось момент-угол многообразия, соответствующее кубу с усечённой вершиной. То есть на данный момент мы не можем отвергнуть гипотезу, что

$$\mathcal{L}_P \cong (S^3 \times S^7)^{\#6} \# (S^4 \times S^6)^{\#8} \# (S^5 \times S^5)^{\#3}.$$

В качестве следующего примера рассмотрим куб с усечённым ребром. Сечение куба и сам куб с усечённым ребром показаны на Рис. 4.

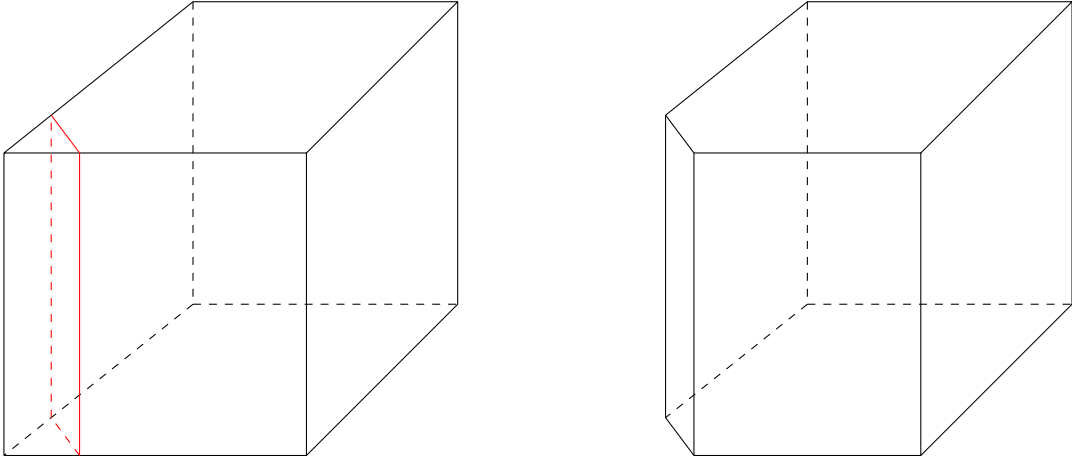


Рис. 4 Куб с усечённым ребром

Сразу заметим, что получившийся многогранник P имеет вид

$$P = K_5 \times I^1,$$

где K_5 — пятиугольник, I^1 — отрезок.

Вычислим момент-угол многообразия, соответствующее отрезку. Решим более общую задачу: найдём момент-угол многообразия, соответствующее симплексу Δ^n . Мы имеем:

$$i_{A,b}(\Delta^n) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y_1 + \dots + y_{n+1} = 1, y_i \geq 0\}.$$

Тогда мы получаем, что

$$\mathcal{L}_{\Delta^n} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\} = S^{2n+1}.$$

Для нашего примера получаем

$$\mathcal{L}_{I^1} = S^3.$$

Также отметим, что $K_4 = I^1 \times I^1$ — квадрат. Его момент-угол многообразия по предложению 2.2 имеет вид

$$\mathcal{L}_{K_4} = S^3 \times S^3.$$

Теорема 4.10 (Theorem 2.2, [4]). Пусть P — простой многогранник размерности n с m гипергранями. Тогда, при условии $m < 3n$, после срезки вершины имеем:

$$\mathcal{L}_{P_v} = \partial((\mathcal{L}_P)_{-1} \times D^2) \#_{j=1}^{m-n} \binom{m-n}{j} (S^{m+n-j-1} \times S^{j+2}),$$

где $(\mathcal{L}_P)_{-1} = \mathcal{L}_P \setminus D^{m+n}$, ∂ — взятие границы.

Предложение 4.11 ((Fico's Lemmata) Lemma 2, [4]). Имеют место следующие диффеоморфизмы:

1. S^p, S^q — сферы соответствующих размерностей. Тогда

$$\partial((S^p \times S^q)_{-1} \times D^2) \cong (S^{p+1} \times S^q) \# (S^p \times S^{q+1}),$$

2. Если M и N — связные многообразия, то

$$\partial((M \# N)_{-1} \times D^2) \cong \partial(M_{-1} \times D^2) \# \partial(N_{-1} \times D^2).$$

Пользуясь теоремой 4.10 и предложением 4.11 и учитывая, что $\mathcal{L}_{K_4} = S^3 \times S^3$, мы можем вычислить \mathcal{L}_{K_5} . А именно:

$$\mathcal{L}_{K_5} = \partial((S^3 \times S^3)_{-1} \times D^2) \# (S^4 \times S^3) \#^2 \# (S^3 \times S^4) = (S^3 \times S^4) \#^5.$$

Применяя предложение 2.2 к кубу с усечённым ребром, получаем описание его момент-угол многообразия:

$$\mathcal{L}_P = \mathcal{L}_{K_5} \times \mathcal{L}_{I^1} = (S^3 \times S^4) \#^5 \times S^3.$$

Таким образом, мы разобрали примеры со всеми многогранниками, которые получаются применением одной операции усечения куба плоскостью.

Рассмотрим ещё 2 примера многогранников, которые получаются применением двукратной операцией срезки ребра. На Рис. 5 показан первый пример такого многогранника.

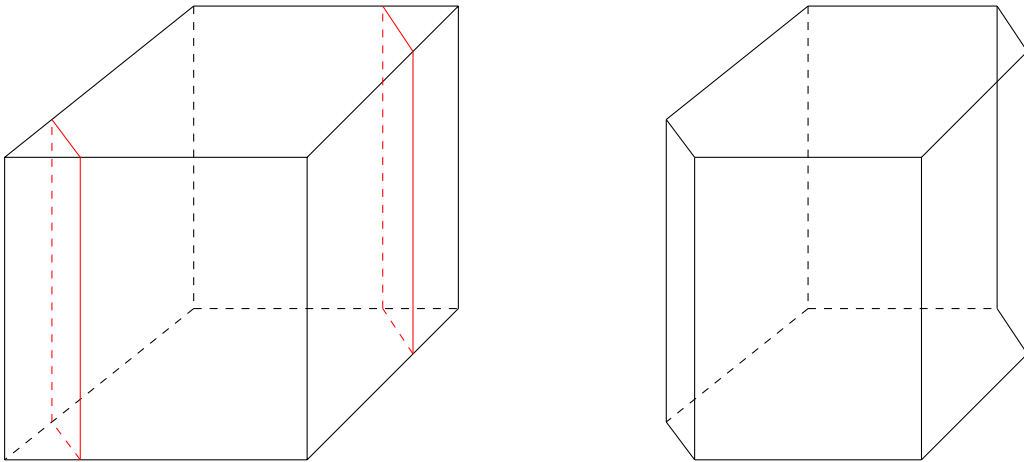


Рис. 5 Первый пример куба с двумя усечёнными ребрами

Очевидно, что данный усечённый куб P_1 является шестиугольной призмой. То есть

$$P_1 = K_6 \times I^1,$$

где K_6 — шестиугольник.

Поскольку $5 < 3 \times 2 = 6$, то можем воспользоваться теоремой 4.10 и предложением 4.11, чтобы посчитать момент-угол многообразия шестиугольника.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{K_6} &= \partial((S^3 \times S^3)_{-1}^{\#5} \times D^2) \# (S^5 \times S^3)^{\#3} \# (S^4 \times S^4)^{\#3} \# (S^3 \times S^5) = \\ &= ((S^3 \times S^5) \# (S^4 \times S^4))^{\#5} \# (S^5 \times S^3)^{\#3} \# (S^4 \times S^4)^{\#3} \# (S^3 \times S^5) = \\ &= (S^3 \times S^5)^{\#9} \# (S^4 \times S^4)^{\#8}.\end{aligned}$$

Тогда момент-угол многообразия, соответствующее шестиугольной призме выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}_{P_1} = \mathcal{L}_{K_6} \times \mathcal{L}_{I^1} = ((S^3 \times S^5)^{\#9} \# (S^4 \times S^4)^{\#8}) \times S^3.$$

Теперь рассмотрим второй пример многогранника, который получается применением двукратной операции срезки ребра. Он показан на Рис. 6.

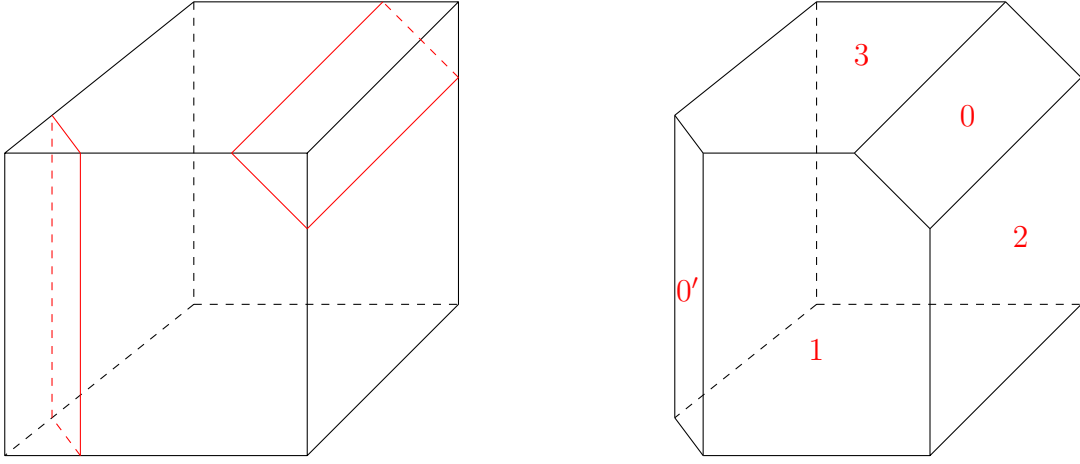


Рис. 6 Второй пример куба с двумя усечёнными ребрами

Обозначим его грани следующим образом: $0, 0'$ — новые грани, отмеченные на рисунке, которые получились при усечении куба, $1, 3$ — передняя и верхняя пятиугольные грани, 2 — правая четырёхугольная грань, $1', 2', 3'$ — грани, противоположные граням $1, 2, 3$ соответственно.

Пусть $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ — коммутативная дифференциальная градуированная алгебра над \mathbb{Z} .

Рассмотрим такие $\alpha_i \in H^{k_i}(A)$, для $i = 1, 2, 3$, что

$$\alpha_1 \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 \alpha_3 = 0$$

в $H(A)$. Выберем их представителей: $[a_i] = \alpha_i$, $a_i \in A^{k_i}$. Так как произведение этих классов когомологий равны нулю, значит их представители отличаются на кограницу:

$$a_1 a_2 = da_{12}, \quad a_2 a_3 = da_{23},$$

где $a_{12} \in A^{k_1+k_2-1}$ и $a_{23} \in A^{k_2+k_3-1}$. Отсюда получаем, что элемент

$$b = (-1)^{k_1+1} a_1 a_{23} + a_{12} a_3$$

является коциклом в $A^{k_1+k_2+k_3-1}$, то есть $db = 0$.

Определение 4.1. *Тройным произведением Масси* $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ называется множество, которое лежит в $H^{k_1+k_2+k_3-1}(A)$ и состоит из элементов, полученных описанной выше операцией. Так как элементы a_{12} и a_{23} определены с точностью до коциклов, тогда можно сказать, что

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle = [b] + \alpha_1 H^{k_2+k_3-1} + \alpha_3 H^{k_1+k_2-1}.$$

Произведение Масси называется тривиальным, если $0 \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$.

Покажем, опираясь на работу [5], что кольцо когомологий данного момент-угол многообразия имеет нетривиальное тройное произведение Масси. Пусть \mathcal{K}_{P_2} — симплицальный комплекс, двойственный к границе нашего второго примера куба с двумя усечёнными рёбрами P_2 . Рассмотрим его кольцо граней. Оно имеет вид:

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}_{P_2}] = \mathbb{Z}[v_0, v_{0'}, v_1, v_{1'}, v_2, v_{2'}, v_3, v_{3'}] / \mathcal{I}_{\mathcal{K}_{P_2}},$$

где

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}_{P_2}} = (v_3 v_{3'}, v_2 v_{2'}, v_1 v_{1'}, v_0 v_{0'}, v_2 v_3, v_1 v_{2'}, v_2 v_{0'}, v_0 v_{1'}, v_0 v_2, v_0 v_{2'}).$$

Рассмотрим кольцо $R^*(\mathcal{K}_{P_2})$, где внешние порождающие $u_0, u_{0'}, \dots, u_3, u_{3'}$ удовлетворяют $du_i = v_i$. Рассмотрим элементы $a = v_3 u_{3'}$, $b = v_2 u_{2'}$, $c = v_1 u_{1'}$. Они являются коциклами, так как

$$da = v_3 v_{3'} = 0, \quad db = v_2 v_{2'} = 0, \quad dc = v_1 v_{1'} = 0.$$

Обозначим соответствующие им классы когомологий: $\alpha, \beta, \gamma \in H^{-1,4}(R^*(\mathcal{K}_{P_2}))$.

Рассмотрим ещё 2 элемента: $e = 0$ и $f = v_1 u_2 u_{2'} u_{1'}$. Тогда, пользуясь тем, что в кольце $R^*(\mathcal{K}_P)$ имеем $v_2 v_3 = v_1 v_{2'} = v_1 v_{1'} = 0$, выполняются равенства

$$ab = v_2 v_3 u_{2'} u_{3'} = 0 = de$$

и

$$bc = v_1 v_2 u_{2'} u_{1'} = v_2 v_1 u_{2'} u_{1'} + v_1 u_2 v_{2'} u_{1'} + v_1 u_2 u_{2'} v_{1'} = df.$$

То есть определено тройное произведение Масси $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \in H^{-4,12}(R^*(\mathcal{K}_{P_2}))$. Оно представлено коциклом

$$(-1)^{3+1} af + ec = af = v_1 v_3 u_{3'} u_2 u_{2'} u_{1'}.$$

Из описания кольца $R^*(\mathcal{K}_{P_2})$ видно, что этот элемент нетривиален. То есть получили, что тройное произведение Масси в нашем примере нетривиально.

Предложение 4.12 (Corollary A.4.10, [1]). Если дифференциальная градуированная алгебра A — формальная, тогда все её произведения Масси в $H(A)$ тривиальные.

То есть в нашем примере алгебра не является формальной. Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 4.13. Момент-угол многообразие \mathcal{L}_{P_2} , соответствующее второму примеру куба с двумя усечёнными гранями, является неформальным.

Отметим, что сферы являются формальными многообразиями. Также формальность многообразия сохраняется при применении к формальным многообразиям операций прямого произведения и связной суммы. То есть момент-угол многообразие \mathcal{L}_{P_1} , рассмотренное в прошлом примере, является формальным многообразием.

В итоге мы получили, что момент-угол многообразия, соответствующие разным кубам с двумя усечёнными гранями, различные.

$$\mathcal{L}_{P_1} \not\cong \mathcal{L}_{P_2}.$$

Получаем, что верна следующая теорема.

Теорема 4.14. Пусть P — многогранник и P_e — многогранник, у которого отсекали ребро. Тогда момент-угол многообразии \mathcal{L}_{P_e} зависит от того, какое ребро мы срезаем.

Заметим, что ранее отмеченное предложение 4.6 говорит нам о том, что момент-угол многообразии не зависит от того, какую вершину мы срезаем. И как мы видим теперь, что если отсекает ребро, то это свойство не выполняется. То есть операция срезки ребра, относительно исследования топологии момент-угол многообразия, устроена сложнее чем операция срезки вершины.

Опишем явный вид кольца когомологий момент-угол многообразия, соответствующего второму примеру куба с двумя усечёнными рёбрами.

$ \mathcal{I} $	$P_{\mathcal{I}} \rightarrow [c]$	Гомотопический тип
2	$P_{\{1,1'\}} \rightarrow [c_1], P_{\{2,2'\}} \rightarrow [c_2], P_{\{3,3'\}} \rightarrow [c_3], P_{\{0,0'\}} \rightarrow [c_0],$ $P_{\{1,2'\}} \rightarrow [a_{12'}], P_{\{3,2'\}} \rightarrow [a_{32'}], P_{\{2,0'\}} \rightarrow [a_{20'}], P_{\{0,2'\}} \rightarrow [a_{02'}],$ $P_{\{0',1'\}} \rightarrow [a_{0'1'}], P_{\{0,3'\}} \rightarrow [a_{03'}]$	Пара точек
3	$P_{\{1,1',2'\}} \rightarrow [c_{12'}], P_{\{2,2',3'\}} \rightarrow [c_{22'3'}], P_{\{2,2',0'\}} \rightarrow [c_{22'0'}], P_{\{2,0',3'\}} \rightarrow$ $[c_{20'3'}], P_{\{3,3',2'\}} \rightarrow [c_{32'}], P_{\{1',1,0'\}} \rightarrow [c_{10'}], P_{\{2',1,0'\}} \rightarrow [c_{2'10'}],$ $P_{\{2',2,0'\}} \rightarrow [c_{2'20'}], P_{\{2',1,2'\}} \rightarrow [c_{2'12'}], P_{\{3',3,0'\}} \rightarrow [c_{30'}], P_{\{0,2',0'\}} \rightarrow$ $[c_{02'0'}], P_{\{0,2',3'\}} \rightarrow [c_{02'3'}], P_{\{0,0',3'\}} \rightarrow [c_{00'3'}], P_{\{0',1',0'\}} \rightarrow [c_{0'1'0'}],$ $P_{\{0',1',2'\}} \rightarrow [c_{0'1'2'}], P_{\{0',0,2'\}} \rightarrow [c_{0'02'}]$	Пара точек
4	$P_{\{2,2',0',3'\}} \rightarrow [c_{22'0'3'}], P_{\{2',1,0,2'\}} \rightarrow [c_{2'102'}], P_{\{0,0',2',3'\}} \rightarrow [c_{00'2'3'}],$ $P_{\{0',2,0,1'\}} \rightarrow [c_{0'201'}], P_{\{0,2,0',2'\}} \rightarrow [c_{020'2'}]$	Пара точек
	$P_{\{1,3,1',3'\}} \rightarrow [e_{020'2'}], P_{\{1,0,1',3'\}} \rightarrow [e_{22'0'3'}], P_{\{1,3,2',3'\}} \rightarrow [e_{0'201'}],$ $P_{\{3,0',3',1'\}} \rightarrow [e_{2'102'}], P_{\{1,2,1',3'\}} \rightarrow [e_{00'2'3'}]$	Окружность
5	$P_{\{1,2',3,1',3'\}} \rightarrow [e_{0'02'}], P_{\{1,3,0,1',3'\}} \rightarrow [e_{22'0'}], P_{\{1,2,1',2',0'\}} \rightarrow [e_{30'}],$ $P_{\{1,0,1',2',0'\}} \rightarrow [e_{32'}], P_{\{1,3,0,2',3'\}} \rightarrow [e_{0'1'2'}], P_{\{2,0,3,0',3'\}} \rightarrow [e_{12'}],$ $P_{\{1,3,2',3',2'\}} \rightarrow [e_{0'1'0'}], P_{\{1,3,1',3',0'\}} \rightarrow [e_{2'20'}], P_{\{1,0,1',3',0'\}} \rightarrow [e_{22'3'}],$ $P_{\{1,0,1',3',2'\}} \rightarrow [e_{20'3'}], P_{\{1,2,1',3,2'\}} \rightarrow [e_{00'3'}], P_{\{1,2,1',3,0'\}} \rightarrow [e_{02'3'}],$ $P_{\{1,2,1',3,3'\}} \rightarrow [e_{0'02'}], P_{\{0',3,1',3',0'\}} \rightarrow [e_{2'12'}], P_{\{0',3,1',3',2'\}} \rightarrow [e_{2'10'}],$ $P_{\{2,0,3,2',3'\}} \rightarrow [e_{10'}]$	Окружность
6	$P_{\{1,0,3,1',2',3'\}} \rightarrow [b_{20'}], P_{\{1,2,0,1',2',0'\}} \rightarrow [e_3], P_{\{1,2,3',1',2',3'\}} \rightarrow [e_0],$ $P_{\{0,1,2,3,2',3'\}} \rightarrow [b_{0'1'}], P_{\{0,2,3,1',3',0'\}} \rightarrow [b_{12'}], P_{\{0,2,3,0',2',3'\}} \rightarrow [e_1],$ $P_{\{0,1,3,0',1',3'\}} \rightarrow [e_2], P_{\{0,1,0',1',2',3'\}} \rightarrow [b_{32'}], P_{\{1,2,3,0',1',3'\}} \rightarrow [b_{02'}],$ $P_{\{1,2,3,0',1',2'\}} \rightarrow [b_{03'}]$	Окружность

Тогда группы когомологий имеют следующий вид.

i	$H^i(\mathcal{L}_P, \mathbb{Z})$
1, 2, 9, 10	$\{0\}$
3	$\mathbb{Z} \cdot \psi([e_0]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_1]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_2]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_3]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([b_{02'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([b_{03'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot$ $\psi([b_{12'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([b_{20'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([b_{32'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([b_{0'1'}])$
4	$\mathbb{Z} \cdot \psi([e_{10'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{12'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{30'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{32'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{02'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{00'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot$ $\psi([e_{20'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{22'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{22'0'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{0'02'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{0'02'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{0'1'0'}]) \oplus$ $\mathbb{Z} \cdot \psi([e_{0'1'2'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{2'10'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{2'12'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{2'20'}])$
5	$\mathbb{Z} \cdot \psi([e_{020'2'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{22'0'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{0'201'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{2'102'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([e_{00'2'3'}])$
6	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c_{020'2'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{22'0'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{0'201'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{2'102'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{00'2'3'}])$
7	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c_{10'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{12'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{30'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{32'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{02'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{00'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot$ $\psi([c_{20'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{22'3'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{22'0'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{0'02'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{0'02'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{0'1'0'}]) \oplus$ $\mathbb{Z} \cdot \psi([c_{0'1'2'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{2'10'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{2'12'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_{2'20'}])$
8	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c_0]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_1]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_2]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([c_3]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([a_{02'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([a_{03'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot$ $\psi([a_{12'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([a_{20'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([a_{32'}]) \oplus \mathbb{Z} \cdot \psi([a_{0'1'}])$
11	$\mathbb{Z} \cdot \psi([c])$

$$(b^0(\mathcal{Z}_P), \dots, b^{11}(\mathcal{Z}_P)) = (1, 0, 0, 10, 16, 5, 5, 16, 10, 0, 0, 1).$$

Осталось написать нетривиальные произведения.

$$H^3 \times H^3 : \begin{cases} \psi([e_1]) \smile \psi([e_3]) = \psi([c_{020'2'}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([b_{03'}]) = \psi([c_{22'0'3}]) \\ \psi([e_3]) \smile \psi([b_{0'1'}]) = \psi([c_{2'102}]) \end{cases}$$

$$H^3 \times H^4 : \begin{cases} \psi([e_0]) \smile \psi([e_{32}]) = \psi([c_{12'}]) & \psi([e_2]) \smile \psi([e_{30}]) = \psi([c_{10'}]) \\ \psi([e_0]) \smile \psi([e_{12'}]) = \psi([c_{32}]) & \psi([e_2]) \smile \psi([e_{10'}]) = \psi([c_{30}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{22'0'}]) = \psi([c_3]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{0'02}]) = \psi([c_{12'}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{22'3}]) = \psi([c_{00'3'}]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{0'1'2}]) = \psi([c_{2'10}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{20'3}]) = \psi([c_{02'3'}]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{12'}]) = \psi([c_{2'20}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{00'3'}]) = \psi([c_{22'3}]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{0'1'0}]) = \psi([c_{2'12}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{02'3'}]) = \psi([c_{20'3}]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{2'20}]) = \psi([c_{10'}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{0'02'}]) = \psi([c_{32}]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{2'12}]) = \psi([c_{0'1'0}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{30}]) = \psi([c_{22'0'}]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{2'10}]) = \psi([c_{0'1'2}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{32}]) = \psi([c_{02'0'}]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{10'}]) = \psi([c_{2'20}]) \\ \psi([b_{20'}]) \smile \psi([e_{30}]) = \psi([c_{12'}]) & \psi([b_{02'}]) \smile \psi([e_{10'}]) = \psi([c_{32}]) \\ \psi([b_{20'}]) \smile \psi([e_{12'}]) = \psi([c_3]) & \psi([b_{02'}]) \smile \psi([e_{32}]) = \psi([c_{10'}]) \\ \psi([b_{03'}]) \smile \psi([e_{12'}]) = \psi([c_{20'3}]) & \psi([b_{32}]) \smile \psi([e_{12'}]) = \psi([c_{00'3'}]) \\ \psi([b_{03'}]) \smile \psi([e_{22'3}]) = \psi([c_{10'}]) & \psi([b_{32}]) \smile \psi([e_{00'3'}]) = \psi([c_{12'}]) \\ \psi([b_{03'}]) \smile \psi([e_{20'3}]) = \psi([c_{12'}]) & \psi([b_{32}]) \smile \psi([e_{02'3'}]) = \psi([c_{10'}]) \\ \psi([b_{03'}]) \smile \psi([e_{10'}]) = \psi([c_{22'3}]) & \psi([b_{32}]) \smile \psi([e_{10'}]) = \psi([c_{02'3'}]) \\ \psi([b_{12'}]) \smile \psi([e_{30}]) = \psi([c_{0'1'2}]) & \psi([b_{0'1'}]) \smile \psi([e_{30}]) = \psi([c_{2'12}]) \\ \psi([b_{12'}]) \smile \psi([e_{32}]) = \psi([c_{0'1'0}]) & \psi([b_{0'1'}]) \smile \psi([e_{32}]) = \psi([c_{2'10}]) \\ \psi([b_{12'}]) \smile \psi([e_{0'1'2}]) = \psi([c_3]) & \psi([b_{0'1'}]) \smile \psi([e_{2'12}]) = \psi([c_{30}]) \\ \psi([b_{12'}]) \smile \psi([e_{0'1'0}]) = \psi([c_{32}]) & \psi([b_{0'1'}]) \smile \psi([e_{2'10}]) = \psi([c_{32}]) \end{cases}$$

$$H^3 \times H^5 : \begin{cases} \psi([e_1]) \smile \psi([e_{020'2'}]) = \psi([c_3]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{020'2'}]) = \psi([c_1]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{22'0'3}]) = \psi([a_{03'}]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{0'201}]) = \psi([a_{12'}]) \\ \psi([e_1]) \smile \psi([e_{00'2'3'}]) = \psi([a_{32}]) & \psi([e_3]) \smile \psi([e_{2'102}]) = \psi([a_{0'1'}]) \\ \psi([b_{03'}]) \smile \psi([e_{22'0'3}]) = \psi([c_1]) & \psi([b_{12'}]) \smile \psi([e_{0'201'}]) = \psi([c_3]) \\ \psi([b_{32}]) \smile \psi([e_{00'2'3'}]) = \psi([c_1]) & \psi([b_{0'1'}]) \smile \psi([e_{2'102}]) = \psi([c_3]) \end{cases}$$

$$H^4 \times H^4 : \left\{ \begin{array}{ll} \psi([e_{10'}]) \smile \psi([e_{30}]) = \psi([c_2]) & \psi([e_{30}]) \smile \psi([e_{22'0'}]) = \psi([c_1]) \\ \psi([e_{10'}]) \smile \psi([e_{32}]) = \psi([a_{02'}]) & \psi([e_{30}]) \smile \psi([e_{0'1'2}]) = \psi([a_{12'}]) \\ \psi([e_{10'}]) \smile \psi([e_{2'20}]) = \psi([c_3]) & \psi([e_{30}]) \smile \psi([e_{2'12}]) = \psi([a_{0'1'}]) \\ \psi([e_{10'}]) \smile \psi([e_{22'3}]) = \psi([a_{03'}]) & \psi([e_{32}]) \smile \psi([e_{0'1'0}]) = \psi([a_{12'}]) \\ \psi([e_{10'}]) \smile \psi([e_{02'3'}]) = \psi([a_{32}]) & \psi([e_{32}]) \smile \psi([e_{0'02'}]) = \psi([c_1]) \\ \psi([e_{12'}]) \smile \psi([e_{0'02}]) = \psi([c_3]) & \psi([e_{32}]) \smile \psi([e_{2'10}]) = \psi([a_{0'1'}]) \\ \psi([e_{12'}]) \smile \psi([e_{30}]) = \psi([a_{20'}]) & \psi([e_{02'3'}]) \smile \psi([e_{20'3}]) = \psi([c_1]) \\ \psi([e_{12'}]) \smile \psi([e_{32}]) = \psi([c_0]) & \psi([e_{00'3'}]) \smile \psi([e_{22'3}]) = \psi([c_1]) \\ \psi([e_{12'}]) \smile \psi([e_{20'3}]) = \psi([a_{03'}]) & \psi([e_{0'1'0}]) \smile \psi([e_{2'12}]) = \psi([c_3]) \\ \psi([e_{12'}]) \smile \psi([e_{00'3'}]) = \psi([a_{32}]) & \psi([e_{0'1'2}]) \smile \psi([e_{2'10}]) = \psi([c_3]) \end{array} \right.$$

Все остальные нетривиальные произведения вида: $H^3 \times H^8$, $H^4 \times H^7$, $H^5 \times H^6$ дают нам порождающий класс $\psi([c]) \in H^{11}$. Это полное описание кольца когомологий $H^*(\mathcal{L}_P, \mathbb{Z})$. Видим, что оно достаточно громоздкое, и считать его уже становится тяжело.

Отметим ещё раз то, что данное момент-угол многообразие не является формальным, а значит не представимо в виде связной суммы произведения сфер.

5. Заключение

Данная работа была посвящена исследованию свойств момент-угол многообразий, соответствующих срезкам трёхмерного куба, с помощью вычисления их кольца когомологий. Рассмотрели все возможные примеры, когда срезка применяется к кубу ровно 1 раз. Было показано, что некоторые срезы давали момент-угол многообразия, которые не являются связными суммами произведений сфер. Были показаны сильные различия в поведении момент-угол многообразия относительно операции срезки вершины и срезки ребра. Были построены кольца когомологий в явном виде для всех рассмотренных примеров, где топология момент-угол многообразия явно не описывалась.

Список литературы

- [1] **V. M. Buchstaber, T. E. Panov.** *Toric Topology*. Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [2] **Frédéric Bosio, Laurent Meersseman.** *Real quadrics in C^n , complex manifolds and convex polytopes*. Acta Mathematica, Royal Swedish Academy of Sciences, Institut Mittag-Leffler, 2006, 197 (1), pp.53- 127. hal-00001526
- [3] **Т. Е. Панов.** *Топология-2*. URL: <http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching/panov-topology2.pdf>.
- [4] **Samuel Gitler and Santiago Lopez de Medrano.** *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums..* Geom. Topol. 17 (2013), no. 3, 1497–1534.
- [5] **Ilya V. Baskakov.** *Massey triple products in the cohomology of moment-angle complexes*. Uspekhi Mat. Nauk 58 (2003), no. 5, 199–200 (Russian); Russian Math. Surveys 58 (2003), no. 5, 1039–1041 (English translation).