

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

A_∞ -структуры, формальность алгебр и описание гомотопических
инвариантов пространств

Курсовая работа
студента 4 курса 403 группы
Граумана Владислава Александровича

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2022 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие *формальности* для DG-алгебр — явления, когда гомотопический тип алгебры есть формальное следствие её когомологий — уже давно показало в математике свою высокую значимость. Формальность алгебр, связанных с топологическим пространством может быть использовано для получения более полной информации о его гомотопических свойствах. Установление факта формальности алгебры или пространства в общем случае является высоко нетривиальной задачей. Известно, к примеру, наличие ряда препятствий к формальности алгебры — наличие нетривиальных когомологических операций, называемых *произведениями Масси*. К сожалению, эти операции не являются единственными препятствиями и существуют неформальные алгебры с тривиальными произведениями Масси. В такой ситуации интерес представляют результаты, представляющие собой критерии. Связь (ко-)формальности пространства и свойств его различных алгебраических инвариантов также не проста и во многих случаях оказывается источником открытых вопросов. Эта работа посвящена результатам в этих двух направлениях.

Формальность DG-алгебры тесно связана (и может быть альтернативно сформулирована) в терминах A_∞ -структур на её когомологиях, однако в общем случае вычисление этой структуры сопряжено со сложностями. Один из критериев формальности DG и A_∞ -алгебр был предложен Дмитрием Калединым (см. изложение В.А. Лунца [5]), и сводил задачу к занулению определенного класса в когомологиях Хохшильда некоторой A_∞ -алгебры особого вида, ассоциированной с исходной алгеброй. Мы даём альтернативную формулировку критерия Каледина в терминах алгебр, не включающих присоединение формальной переменной, и, отправляясь от этого, доказываем критерии формальности в терминах некоторой спектральной последовательности. Аналогичные результаты получены также и для L_∞ -случая. Мы используем эти результаты для доказательства некоторых следствий о формальности сумм и тензорных произведений.

Как установлено в работе Найзендорфера и Миллера [1], формальность пространства эквивалентна занулению пертурбации дифференциала на модели Квиллена, а коформальность — на минимальной модели пространства. Таким образом, наличие, например, кубических, четверных и т.д. соотношений в рациональной гомотопической алгебре пространства свидетельствует о его неформальности, а таких соотношений в его когомологиях — об отсутствии коформальности. Мы продолжаем эту связь дальше: доказываем, что существуют A_∞ и L_∞ -структуры на когомологиях и рациональной гомотопической алгебре Ли пространства соответственно. Это позволяет нам судить о наличии или отсутствии высших соотношений в этих инвариантах, и уточняет их роль как препятствий к (ко-)формальности. Полученные результаты дают инструмент для полного подсчёта рациональных гомотопических алгебр (или же алгебр Понтрягина) для некоторых пространств.

Структура работы такова.

В разделах 2.1–2.3 излагаются предварительные определения и утверждения, связанные с A_∞ -структурами, включая свойства и объекты, необходимые для дальнейшей работы с формальностью.

В разделе 2.4 определяется когомологический критерий формальности, установленный Калединым.

В разделе 2.5 определены L_∞ -алгебры, а также приведены нужные для работы с ними сведения о симметрических алгебрах и коалгебрах.

В разделе 3.1 доказан результат о связи соотношений в рациональной гомотопической алгебре и A_∞ -структур на приведённых рациональных гомологиях (следствие 2), и аналогичный результат для соотношений в рациональных гомологиях и L_∞ -структуры на гомотопической алгебре (следствие 3). Они получаются применением соответственно теорем 3 и 4 к модели Квиллена и минимальной коалгебраической модели пространства.

В разделе 3.2 доказывается критерий формальности, основанный на спектральной последовательности, ассоциированной с комплексом особого вида (теорема 5) и предложение 4 о трансфере формальности.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. A_∞ -структуры. Здесь мы кратко изложим основные определения и результаты, связанные с A_∞ -(ко-)алгебрами. Одним из стандартных введений является работа Келлера [8].

Зафиксируем коммутативное кольцо с единицей R . Здесь и далее непомеченные тензорные произведения \otimes понимаются над R .

Определение 1. A_∞ -алгеброй над R называют \mathbb{Z} -градуированный R -модуль $A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A^p$, снабжённый совокупностью однородных R -линейных отображений

$$m_n : A^{\otimes n} \rightarrow A, n \in \mathbb{N}$$

степени $2 - n$, удовлетворяющим тождествам Стасеффа

$$(SI_n) \quad \sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t \geq 0, s \geq 1}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(\text{id}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \text{id}^{\otimes t}) = 0$$

В частности, m_2 можно интерпретировать как умножение в алгебре, а m_1 — дифференциал, удовлетворяющий тождеству Лейбница относительно m_2 .

Двойственным образом под A_∞ -коалгеброй понимается \mathbb{Z} -градуированный R -модуль $C = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C^p$ с заданной совокупностью однородных R -линейных отображений

$$\Delta_n : C \rightarrow C^{\otimes n}, n \in \mathbb{N}$$

степени $n - 2$, удовлетворяющим тождествам Стасеффа

$$(SI_n^*) \quad \sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t \geq 0, s \geq 1}} (-1)^{r+st} (\text{id}^{\otimes r} \otimes \Delta_s \otimes \text{id}^{\otimes t}) \Delta_{r+1+t} = 0.$$

При применении этих тождеств к элементам модуля употребляется известное соглашение о знаках Кошуля. Далее для удобства мы формулируем свойства для A_∞ -алгебр, случай коалгебр определяются по двойственности. A_∞ -(ко-)алгебры образуют категорию при задании морфизмов следующим образом.

Определение 2. Морфизм A_∞ -алгебр или A_∞ -морфизм $f : A \rightarrow B$ это совокупность однородных R -линейных отображений

$$f_n : A^{\otimes n} \rightarrow B, n \in \mathbb{N}$$

степени $1 - n$, удовлетворяющих тождествам

$$(MI_n) \quad \sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t \geq 0, s \geq 1}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t}(\text{id}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \text{id}^{\otimes t}) = \sum (-1)^s m_r(f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}),$$

где суммирование в правой части производится по всем $1 \leq r \leq n$ и разложениям $n = i_1 + \cdots + i_r$ в сумму натуральных чисел; знак определён как

$$s = (r-1)(i_1-1) + (r-2)(i_2-1) + \cdots + 2(i_{r-2}-1) + (i_{r-1}-1).$$

Морфизм f есть *квазиизоморфизм*, если f_1 является квазиизоморфизмом. Морфизм f строгий, если $f_n = 0$ при $n \geq 2$. Композиция $f : B \rightarrow C$ и $g : A \rightarrow B$ задаётся как

$$(f \circ g)_n = \sum (-1)^s f_r(g_{i_1} \otimes g_{i_2} \otimes \cdots \otimes g_{i_r}),$$

где знак и суммирование такие же, как в тождествах, определяющих морфизмы.

Мы говорим, A_∞ -алгебры A и B *квазиизоморфны*, если существуют A_∞ -алгебры A_1, \dots, A_k и квазиизоморфизмы

$$A \leftarrow A_1 \rightarrow \cdots \leftarrow A_k \rightarrow B.$$

Определение 3. A_∞ -алгебра A называется *формальной*, если она квазиизоморфна A_∞ -алгебре $(H(A), (0, m_2, 0, \dots))$, где m_2 индуцировано умножением на A .

Мы говорим, что A_∞ -алгебра A *строго унитарна*, если в ней есть элемент 1_A степени ноль такой, что $m_1(1_A) = 0$, $m_2(1_A, a) = a = m_2(a, 1_A)$ для всех $a \in A$ и что для всех $i \geq 3$ и всех $a_1, \dots, a_i \in A$ произведение $m_i(a_1, \dots, a_i)$ обращается в ноль, если хотя бы один из a_j равен 1_A . Если A и B — строго унитарные A_∞ -алгебры, то A_∞ -морфизм $f : A \rightarrow B$ *строго унитарен*, если $f_1(1_A) = 1_B$ и для всех $i \geq 2$ и всех $a_1, \dots, a_i \in A$ элемент $f_i(a_1, \dots, a_i)$ обращается в ноль, если хотя бы один из a_j равен 1_A . Каждая строго унитарная A_∞ -алгебра A имеет строгий морфизм $\eta : R \rightarrow A$, переводящий 1_R в 1_A . Она *аугментирована*, если задан строго унитарный морфизм $\varepsilon : A \rightarrow k$ такой, что $\varepsilon \circ \eta = \text{id}_R$. Морфизм аугментированных A_∞ -алгебр это строго унитарный морфизм $f : A \rightarrow B$ такой, что $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$. Функтор $A \mapsto \ker \varepsilon_A$ определяет эквивалентность из категории аугментированных A_∞ -алгебр в категорию A_∞ -алгебр.

2.2. Бар-конструкция для A_∞ -алгебр. Понятия A_∞ -алгебр и A_∞ -морфизмов могут быть естественным образом описаны на языке бар-конструкций. Пусть A — когомологически \mathbb{Z} -градуированный R -модуль, и sA — его надстройка, определяемая равенством $(sA)^n = A^{n+1}$. Положим

$$\overline{T}sA = \bigoplus_{i \geq 1} (sA)^{\otimes i},$$

иными словами, это усечённая тензорная коалгебра на sA со стандартным умножением $\Delta : \overline{T}sA \rightarrow \overline{T}sA \otimes \overline{T}sA$, задаваемым деконкатенацией

$$(1) \quad \Delta(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n),$$

и $\Delta(a) = 0$ для всех a из A . Обозначим за $\text{Coder}(\overline{T}sA)$ градуированный R -модуль однородных R -линейных кодериваций коалгебры $\overline{T}sA$. Композиция кодеривации с проекцией $\overline{T}sA \rightarrow sA$ определяет изоморфизм градуированных R -модулей

$$\text{Coder}(\overline{T}sA) \cong \text{Hom}_R^*(\overline{T}sA, sA),$$

то есть каждая кодеривация d степени p имеет каноническое разложение $d = d_1 + d_2 + d_3 + \dots$, где $d_i : (sA)^{\otimes i} \rightarrow sA$ — однородное R -линейное отображение степени p .

Пусть теперь A снабжён структурой A_∞ -алгебры $m_i : A^{\otimes i} \rightarrow A$. Будем рассматривать сдвиг градуировки как отображение степени -1 $s : A \rightarrow sA$, совпадающее с тождественным в категории R -модулей. Зададим отображения $b_i : (sA)^{\otimes i} \rightarrow sA$, исходя из коммутативности следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes i} & \xrightarrow{m_i} & A \\ s^{\otimes i} \downarrow & & \downarrow s \\ (sA)^{\otimes i} & \xrightarrow{b_i} & sA \end{array}$$

Факт того, что m_i задают A_∞ -структуру, эквивалентен тому, что b_i являются компонентами в разложении некоторой кодеривации d степени 1, для которой $d^2 = 0$. Символом m мы будем обозначать A_∞ -структуру на A , воспринимаемую как кодеривацию степени 1 на $\overline{T}sA$.

Определение 4. Полученную DG-коалгебру $(\overline{T}sA, m)$ называют *бар-конструкцией* A_∞ -алгебры A . Обозначим её $\mathcal{B}A$.

Если B — ещё одна A - ∞ -алгебра, то существует естественная биекция между A_∞ -морфизмами $A \rightarrow B$ и морфизмами степени ноль коалгебр $\mathcal{B}A \rightarrow \mathcal{B}B$. Мы будем использовать одинаковые обозначения для морфизмов, соответствующих друг другу посредством этой биекции.

2.3. A_∞ -алгебры и минимальные модели. Мы ограничимся рассмотрением класса A_∞ -алгебр, обладающих следующим свойством.

Определение 5. A_∞ -алгебра A называется *плоской*¹, если каждый R -модуль когомологий $H^i(A)$ R -проективен.

Над полем всякая A_∞ -алгебра плоская. Напомним следующий известный результат Кадеишвили.

Теорема 1 ([15]). Пусть A — плоская A_∞ -алгебра, и $g : H(A) \rightarrow A$ — квази-изоморфизм цепных комплексов R -модулей, где дифференциал на $H(A)$ тождественно нулевой. Тогда существует структура минимальной A_∞ -алгебры на $H(A)$, где m_2 индуцировано умножением на A , а также A_∞ -морфизм $f = (g_1, g_2, \dots) : H(A) \rightarrow A$, где $g_1 = g$.

Мы называем так полученную A_∞ -алгебру *минимальной моделью* для A . Она единственна с точностью до A — ∞ -квазиизоморфизма. Заметим, что для A_∞ -алгебр понятие квазиизоморфность совпадает с существованием квазиизоморфизма между ними. Квазиизоморфные плоские A_∞ -алгебры имеют изоморфные бар-конструкции.

¹Это определение не совпадает с обычным определением плоского модуля.

Как следует из определения A_∞ -алгебры, DG-алгебра есть ни что иное, как A_∞ -алгебра, у которой $m_i = 0$ при $i \geq 3$. Под морфизмом DG-алгебр мы понимаем морфизм ассоциативных алгебр, коммутирующий с дифференциалами. Таким образом, категория DG-алгебр не является полной подкатегорией в категории A_∞ -алгебр. Для DG-алгебр (даже для плоских) в общем случае не верен тот факт, что квазиизоморфные DG-алгебры могут быть связаны одним квазиизоморфизмом. Для плоских DG-алгебр справедлив следующий важный результат.

Предложение 1. Пусть E, F — плоские DG-алгебры и A, B — их минимальные модели соответственно. Тогда эквивалентны следующие утверждения.

- (1) E, F DG-квазиизоморфны;
- (2) E, F A_∞ -квазиизоморфны;
- (3) A, B A_∞ -квазиизоморфны;
- (4) $\mathcal{B}A, \mathcal{B}B$ A_∞ -квазиизоморфны.

Как и ранее, мы говорим, что DG-алгебра E формальна (в DG-смысле), если она квазиизоморфна алгебре $H(E)$ с нулевым дифференциалом и индуцированным с E умножением.

Следствие 1. Пусть E — минимальная плоская DG R -алгебра с минимальной моделью A . Тогда E DG-формальна тогда и только тогда, когда A формальна как A_∞ -алгебра.

Таким образом, в плоском случае мы можем исследовать формальность DG-алгебр, используя лишь их минимальные модели. В дальнейшем мы подразумеваем, что все A_∞ и DG-алгебры плоские.

2.4. Класс Каледина. Пусть A — плоская минимальная A_∞ R -алгебра. Рассмотрим градуированный модуль $\text{Coder}(\overline{T}sA)$, и определим на нём отображение степени 1, заданное как $d \mapsto [m_A, d] = m_A \cdot d - (-1)^{\deg d} d \cdot m_A$, где d — кодеривация на $\overline{T}sA$, m_A — структура A_∞ -алгебры на A , воспринимаемая как кодеривация, и умножение кодериваций понимается как их композиция. Так как $m_A^2 = 0$, то $[m_A, \cdot]$ является дифференциалом на $\text{Coder}(\overline{T}sA)$. Таким образом, мы получили цепной комплекс R -модулей, называемый *комплексом Хохшильда*. Обозначим его $C_R^*(A)$. Его когомологии со сдвигом в индексе

$$HH_R^{i+1}(A) := H^i(C_R^*(A))$$

называются *когомологиями Хохшильда A* . Квазиизоморфные плоские A_∞ -алгебры имеют изоморфные бар-конструкции, так что их когомологии Хохшильда также изоморфны.

В терминах комплекса Хохшильда Дмитрий Каледин ([13]) сформулировал критерий формальности для A_∞ -алгебр. Этот критерий может быть также распространён на случай DG-алгебр Ли, как отмечено в [5].

Зафиксируем k — поле характеристики ноль, и R — коммутативную k -алгебру. Если M является R -модулем, то можно определить модуль степенных рядов от формальной переменной h как

$$M[[h]] = \varprojlim M[h]/h^n = \varprojlim (M \otimes R[h])/h^n,$$

где для $R[h]$ -модуля E мы обозначили $E/h^n := E/h^n \cdot E$. Мы воспринимаем $M[[h]]$ как $R[[h]]$ -модуль. В общем случае мы говорим, что $R[[h]]$ -модуль P *h-свободный полный*, если он изоморфен $\overline{P}[[h]]$, где $\overline{P} = P/h$.

Заметим, что $M[[h]]$ канонически отождествляется с множеством формальных степенных рядов $\sum_{i=0}^{\infty} m_i h^i$, $m_i \in M$. Аналогичное отождествление для произвольного h -свободного полного модуля возможно, когда задано отображение выбора представителей $\overline{P} \rightarrow P$.

Пусть B — h -свободный полный $R[[h]]$ -модуль со структурой A_{∞} -алгебры (B, m) (напомним, что все алгебры считаются плоскими). Выберем отображение выбора $\overline{B} \rightarrow B$ в категории R -модулей, где $\overline{B} = B/h$. Тогда можно записать

$$m = m^{(0)} + m^{(1)}h + m^{(2)}h^2 + \dots$$

для некоторых кодериваций $m^{(i)} \in C_R^1(\overline{B})$. Рассмотрим кодеривацию

$$\partial_h m = m^{(1)} + 2m^{(2)}h + 3m^{(3)}h^2 + \dots \in C_{R[[h]]}^1(B).$$

Тогда $\partial_h m$ является коциклом в комплекса Хохшильда и потому определяет класс $[\partial_h m] \in HH_{R[[h]]}^2(B)$.

Определение 6. Класс $[\partial_h m] \in HH_{R[[h]]}^2(B)$ называется *классом Каледина* B и обозначается K_B . Он не зависит от отображения выбора представителей $\overline{B} \rightarrow B$. Определение класса Каледина справедливо и для минимальных (плоских) A_{∞} $R[h]/h^{n+1}$ -алгебр. Мы рассматриваем класс $K_{B/h^{n+1}}$ для A_{∞} $R[h]/h^{n+1}$ -алгебры B/h^{n+1} как элемент в $HH_{R[h]/h^n}^2(B/h^n)$.

Пусть $A = (A, m)$ — минимальная плоская A_{∞} R -алгебра. Рассмотрим A_{∞} $R[h]$ -алгебру $\tilde{A} = (A[h], \tilde{m} = (m_2, m_3 h, m_4 h^2, \dots))$. Алгебру \tilde{A} называют *деформацией к нормальному конусу* A . Если $A(2)$ обозначает алгебру $(A, (m_2, 0, 0, \dots))$, то A и $A(2)$ квазиизоморфны тогда и только тогда, когда квазиизоморфны \tilde{A} и $A(2)[h]$. Поэтому A формальна тогда и только тогда, когда \tilde{A} формальна. Более того, при помощи \tilde{A} мы можем определить отклонение алгебры от формальности.

Определение 7. A_{∞} R -алгебра A называется *n-формальной*, если существует квазиизоморфизм A_{∞} $R[h]/h^{n+1}$ -алгебр $\gamma : \tilde{A}/h^{n+1} \rightarrow A(2)[h]/h^{n+1}$ такой, что $\gamma \equiv (\text{id}, 0, 0, \dots) \pmod{h}$.

Каледин [13] доказал, что классы $K_{\tilde{A}}, K_{\tilde{A}/h^{n+1}}$ дают критерии формальности A_{∞} -алгебр.

Теорема 2 ([13],[5]). *Минимальная плоская A_{∞} R -алгебра A формальна тогда и только тогда, когда $K_{\tilde{A}} = 0$. Она n-формальна тогда и только тогда, когда $K_{\tilde{A}/h^{n+1}} = 0$.*

2.5. L_{∞} -структуры. Так как наши результаты будут иметь аналоги для L_{∞} -структур, мы также дадим определение L_{∞} -алгебры, но за более подробной информацией отсылаем читателя к стандартной литературе, например, [3].

Определение 8. L_{∞} -алгеброй называют градуированное векторное пространство $L = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_n$ над R , снабжённое совокупностью R -линейных однородных отображений

$$\ell_n : L^{\otimes n} \rightarrow L, n \in \mathbb{N}$$

степени $n - 2$, удовлетворяющими для каждого $n \in \mathbb{N}$ следующим условиям. Во-первых, для каждой перестановки σ на n элементах

$$\ell_n(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma)\ell_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n),$$

а во-вторых, справедливо обобщение тождества Якоби

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma \in \text{Sh}(i, n-i)} \text{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{i(j-1)} \ell_j(\ell_i(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(i)}) \otimes x_{\sigma(i+1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}) = 0,$$

где $\text{Sh}(i, n - i)$ — множество $(i, n - i)$ -тасующих перестановок, то есть таких $\sigma \in S_n$, что $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$ и $\sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)$.

Положим теперь, что V — DG-векторное пространство. Далее нам также понадобятся определения следующих объектов.

Пусть $T(V) = \bigoplus_{i \geq 0} V^{\otimes i}$ — тензорная алгебра на V , а I — идеал в ней, порождённый всеми элементами $x \otimes y - (-1)^{\deg x \deg y} y \otimes x$, где $x, y \in V$. Фактор-алгебра $S(V) := T(V)/I$ называется *симметрической алгеброй* на V , она коммутативна. Обозначим как $\pi : T(V) \rightarrow S(V)$ каноническую проекцию. Про элементы из $S^n(V) = \pi(V^{\otimes n})$ будем говорить, что их *длина* равна n . Мы также обозначим индуцированное умножение на $S(V)$ символом \vee , то есть $\pi(x \otimes y) = x \vee y$.

На $T(V)$ существует стандартное коумножение Δ , заданное как $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, и для $x \in \overline{T}(V)$ $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \overline{\Delta}(x)$, где $\overline{\Delta}$ — деконкатенация (1). Отображение $N : S(V) \rightarrow T(V)$, действующее по правилу $N(1) = 1$, $N(v) = v$, $v \in V$, и

$$N(v_1 \vee \cdots \vee v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}, \quad v_1, \dots, v_n \in V,$$

является инъективным, причём $\pi \circ N = \text{id}_{S(V)}$. Известно, что $\text{Im}(N) \subset T(V)$ есть подкоалгебра $T(V)$, поэтому можно индуцировать коумножение Δ_S на $S(V) \cong \text{Im}(N)$. В этом случае оно примет вид

$$(2) \quad \Delta_S(v_1 \vee \cdots \vee v_n) = \sum_{i=0}^n \sum_{\sigma \in \text{Sh}(i, n-i)} \varepsilon(\sigma) (v_{\sigma(1)} \vee \cdots \vee v_{\sigma(i)}) \otimes (v_{\sigma(i+1)} \vee \cdots \vee v_{\sigma(n)}).$$

Это коумножение кокоммутативно и согласовано с умножением. Напомним, что свойство однородного линейного отображения $d : C \rightarrow C$ на коалгебре C быть кодеривацией означает, что $\Delta_C \circ d = (d \otimes 1 + 1 \otimes d) \circ \Delta_C$. Важным для нас будет следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть C — кокоммутативная коалгебра, и $f : C \rightarrow S(V)$ — гомоморфизм коалгебр. Обозначим как $\text{pr}_V : S(V) \rightarrow V$ каноническую проекцию. Линейное отображение

$$\text{Coder}(C, S(V)) \rightarrow \text{Hom}(C, V), \quad d \mapsto \text{pr}_V \circ d$$

есть изоморфизм. Его обратный задаётся как

$$\text{Hom}(C, V) \rightarrow \text{Coder}(C, S(V)), \quad \lambda \mapsto \vee \circ (\lambda \otimes f) \circ \Delta_C.$$

Для L_∞ -алгебр поэтому справедливы некоторые аналоги свойств A_∞ -алгебр. Мы далее также будем использовать следующий результат.

Предложение 2 ([3]). L_∞ -структура на градуированном векторном пространстве L эквивалентна совокупности линейных отображений $\lambda_k : S^k(sL) \rightarrow sL$, $k \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma \in \text{Sh}(i, n-i)} \varepsilon(\sigma) \lambda_j(\lambda_i(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = 0$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. О связи (ко-)формальности, соотношений в алгебрах и A_∞, L_∞ -структур. Для формулировки и доказательства наших основных результатов сделаем краткое напоминание об алгебрах Ли и дифференциалах на них. Далее если модуль A градуирован гомологически, то считаем, что оператор сдвига действует как $(sA)_n = A_{n-1}$, а если когомологически, то тогда $(sA)^n = A^{n+1}$.

Свободная алгебра Ли $F(V)$ на векторном пространстве V вместе с каноническим линейным вложением $V \rightarrow F(V)$ характеризуются универсальным свойством: для всякого линейного отображения $f : V \rightarrow L$, где L — алгебра Ли, существует единственный морфизм алгебр Ли $\bar{f} : F(V) \rightarrow L$ такой, что композиция $V \rightarrow F(V) \rightarrow L$ равна f .

Другое описание $F(V)$ таково. Зададим на алгебре $T(V)$ коумножение $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ для $x \in V$, а на остальных элементах так, чтобы $T(V)$ стала алгеброй Хопфа. Тогда можно положить $F(V) = PT(V)$.

Пусть в пространстве V выбран базис (v_i) . Напомним, что в векторном пространстве $F(V)$ свободной алгебры Ли существует базис, в котором все элементы будут правонормированными итерированными скобками

$$(3) \quad [v_{j_1}, [v_{j_2}, \dots, [v_{j_{k-1}}, v_{j_k}] \dots]]$$

от векторов v_j (см., например, [14]). При этом, конечно, не все скобки вида (3) войдут в базис. Мы будем говорить, что вложенная скобка (3) имеет *длину* k .

Пусть L — DG-алгебра Ли с дифференциалом d степени -1 , и $QL = L/[L, L]$ обозначает абелианизацию L . Выберем базис (x_j) в QL и расщепление $QL \rightarrow L$, так что мы можем рассматривать (x_j) как минимальный набор порождающих элементов L . Действие дифференциала на x_j в таком случае можно записать в виде конечной суммы

$$d(x_\alpha) = \sum_i x_i + \sum_{j,k} [x_j, x_k] + \sum_{l,m,n} [x_l, [x_m, x_n]] + \dots,$$

правая часть этого равенства представляет собой разложение по длинам вложенных скобок. Выделим линейное отображение, действующее по правилу

$$x_i \mapsto \sum_{j_1, \dots, j_k} [x_{j_1}, \dots, [x_{j_{k-1}}, x_{j_k}] \dots]$$

и продолжим его до деривации d^k на L . В таком случае дифференциал d на L представляется в виде суммы $d = d^1 + d^2 + d^3 + \dots$ дериваций, где d^k повышает длину скобок от неразложимых элементов x_i на $k - 1$.

Теорема 3. Пусть L — минимальная DG-алгебра Ли, без учёта дифференциала совпадающая со свободной алгеброй Ли $F(V)$ на DG-векторном пространстве V . Тогда на $sHQL$ существует структура минимальной A_∞ -коалгебры

$\Delta = (\Delta_2, \Delta_3, \dots)$, обладающей следующим свойством. Если

$$d^n(x) = [x_1, [x_2, \dots, [x_{n-1}, x_n] \dots]],$$

где d^n — n -ая компонента дифференциала на L , $x \in V$, $x_i \in V$, то

$$\Delta_i(s\bar{x}) = [s\bar{x}_1, [s\bar{x}_2, \dots, [s\bar{x}_{n-1}, s\bar{x}_n] \dots]],$$

где \bar{y} обозначает цикл с представителем y , а $[sa, sb] = (-1)^{\deg a} sa \otimes sb - (-1)^{(\deg a+1)\deg b} sb \otimes sa$.

Доказательство. Рассмотрим фильтрацию L , задаваемую длинами слов от неразложимых элементов: $F^0(L) = L$, $F^{-1}(L) = [L, L]$, \dots , $F^{-n}(L) = [L, F^{-n+1}(L)]$. Иными словами, $F^{-n}(L)$ есть элементы L , представимые в виде суммы вложенных скобок от неразложимых элементов с длинами не меньше n . Эта фильтрация даёт нам спектральную последовательность алгебр Ли с $E^0(L) = F(V)$, $E^1(L) = F(HV) = F(HQL)$, $E_{0,n}^1 = H_nQL$.

Рассмотрим отображения, задаваемые посредством следующей диаграммы для каждого $r \geq 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} H_nQL & \xrightarrow{=} & E_{0,n}^1 & \xrightarrow{\bar{d}_r} & E_{-r,n+r-1}^1 & \xrightarrow{\subseteq} & F(HQL) \xrightarrow{\subseteq} T(HQL) \rightarrow (HQL)^{\otimes r+1} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & E_{0,n}^r & \xrightarrow{d_r} & E_{-r,n+r-1}^r & & \end{array}$$

Здесь вертикальные стрелки означают канонические проекции, d_r обозначает дифференциал на листе E^r , а \bar{d}_r замыкает квадрат по коммутативности (произвольным образом), $F(HQL)$ вкладывается в тензорную алгебру $T(HQL)$ как подалгебра примитивных элементов. Рассмотрим отображения $\bar{\Delta}_{r+1} : HQL \rightarrow (HQL)^{\otimes r+1}$, действие которых на компоненте H_nQL задаётся композицией в верхней строке. Они однозначно определены, и вычислить их можно, исследуя представление дифференциала спектральной последовательности

$$d_r : E_{0,n}^r \rightarrow E_{-r,n+r-1}^r, \text{ где}$$

$$E_{p,q}^r = \frac{\{x \in F_p L_{p+q} : dx \in F_{p-r} L_{p+q-1}\}}{\{x \in F_{p-1} L_{p+q} : dx \in F_{p-r} L_{p+q-1}\} + \{x \in F_p L_{p+q} : x = dy, y \in F_{p+r-1} L_{p+q+1}\}}.$$

Здесь d — дифференциал на алгебре Ли L . Если рассмотреть элемент $x \in L_n$, такой, что dx есть элемент $F_{-1}L_{n-1}$ (что в случае минимальной алгебры выполнено для всех элементов), то после взятия фактора в определении $E_{0,n}^r$ мы можем считать, что x есть сумма неразложимых элементов, являющихся циклами, причём dx есть сумма скобок длин не менее $r+1$, а при взятии фактора в определении $E_{-r,n+r-1}^r$ игнорируются скобки длины не менее $r+2$, то есть действие d_r можно интерпретировать как взятие лишь компоненты дифференциала от x , повышающей длины скобок на r . Проекция $E^1 \rightarrow E^r$, таким образом, стирает различия между элементами, дифференциалы которых отличны только лишь в компонентах, повышающих длины не более, чем на $r-1$, поэтому \bar{d}_r сохраняет интерпретацию как взятие соответствующей компоненты дифференциала. При вложении $F(HQL) \rightarrow T(HQL)$ скобки Ли интерпретируются как градуированные коммутаторы в тензорной алгебре.

Мы получаем, что если $d = d^2 + d^3 + \dots$ — разложение дифференциала на $L = F(V)$, то $\bar{\Delta}_n$ вычисляются из формул, выражающих d_n , например, если $(x_\alpha)_\alpha$ — базис в $V = QL$, то из $d_2(x_\alpha) = \sum c_{\beta\gamma} [x_\beta, x_\gamma]$, то $\bar{\Delta}_2(x_\alpha) = \sum c_{\beta\gamma} (x_\beta \otimes x_\gamma + x_\gamma \otimes x_\beta)$

и так далее. Заметим, что условие $d^2 = 0$, записанное в терминах разложения в сумму d^i (продолжая каждую d^i как деривацию на всю алгебру) запишется в терминах $\overline{\Delta}_i$ как

$$\sum (\text{id}^{\otimes r} \otimes \overline{\Delta}_s \otimes \text{id}^{\otimes t}) \overline{\Delta}_{r+1+t} = 0,$$

где множество индексов суммирования аналогично таковому в тождествах Сташеффа. При переходе от HQL к $sHQL$ эти равенства приобретут знаки (из правила Кошуля), соответствующие тождествам Сташеффа, если $\overline{\Delta}_i$ заменить на $\Delta_i = s^{\otimes i} \circ \overline{\Delta}_i \circ s^{-1}$. \square

Для нас наибольший интерес это предложение представляет в топологическом контексте. Предположим, что X — односвязное пространство конечного \mathbb{Q} -типа, и L_X — его минимальная модель Квиллена. В таком случае, как известно, существует изоморфизм коалгебр $sQL_X \cong \check{H}_*(X; \mathbb{Q})$ (это можно доказать, исходя из рассмотрения спектральной последовательности для $\mathcal{C}(L_X)$, фильтрованного по второй компоненте бистепени, см. [2]), причём стандартное коумножение на гомологиях совпадает с коумножением, построенным методом теоремы 3. Индуцируем посредством этого строгого изоморфизма A_∞ -коалгебраическую структуру на $\check{H}_*(X; \mathbb{Q})$, то есть дополним коумножение в когомологиях до A_∞ -структуры, пользуясь теоремой 3. Таким образом, мы можем доказать следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть X — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Тогда на $\check{H}_*(X; \mathbb{Q})$ существует структура минимальной A_∞ -коалгебры $\Delta = (\Delta_2, \Delta_3, \dots)$, где Δ_2 есть стандартное гомологическое коумножение, или, двойственным образом, структура минимальной A_∞ -алгебры на $\check{H}^*(X; \mathbb{Q})$, продолжающая его структуру кольца, причём Δ_n соответствует n -ой компоненте в разложении дифференциала L_X в смысле теоремы 3. Наличие (отсутствие) соотношений длины k в $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ (или в $H_*(\Omega X; \mathbb{Q})$) равносильно нетривиальности (соотв. тривиальности) соответствующей операции m_k на $\check{H}^*(X; \mathbb{Q})$.*

Доказательство. Предположим, что в $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ имеется соотношение, содержащее слагаемые, являющиеся вложенными скобками от неразложимых элементов длины n , причём это соотношение не является следствием других соотношений (не входит в идеал, порождаемый другими соотношениями). Тогда задающий это соотношение элемент модели Квиллена L_X является границей от неразложимого элемента x , а потому компонента d^n дифференциала d не равна нулю. По теореме это даёт нетривиальное Δ_n .

Наоборот, если Δ_n не тождественно равно нулю, то d^n не ноль на некоем неразложимом элементе, поэтому в $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ имеется соотношение, содержащее скобки длины n . Так как это соотношение происходит из границы неразложимого элемента, оно не является следствием соотношений с меньшей максимальной длиной скобок. \square

Пример. Мы приведём здесь пример из торической топологии. Для натурального m обозначим $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$. Подмножество \mathcal{K} во множестве подмножеств $[m]$ называется *симплициальным комплексом*, если из того факта, что $I \in \mathcal{K}$, следует, что всякое $L \subseteq I$ также лежит в \mathcal{K} . Элементы \mathcal{K} называются его *симплексами*, а элементы $1, 2, \dots, m$, отождествляемые с одноэлементными симплексами, называют его *вершинами*. Пара вершин i, j соединена

ребром, если $\{i, j\} \in \mathcal{K}$. Комплекс \mathcal{K} называется *флаговым*, если для каждое множество вершин в $[m]$, попарно соединённых рёбрами, является симплексом в \mathcal{K} . Каждому симплициальному комплексу \mathcal{K} можно сопоставить его *флаги-зацию*, получаемую добавлением симплексов для каждого множества попарно соединённых вершин, если они уже не образовывали симплекс в \mathcal{K} .

Пусть $I \subseteq [m]$, а (X, A) — топологическая пара. Обозначим

$$(X, A)^I = X_1 \times \cdots \times X_m,$$

где $X_k = X$, если $k \in I$, и $X_k = A$ иначе. В таком случае *момент-угол комплексом*, соответствующим симплициальному комплексу \mathcal{K} , называют топологическое пространство

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I.$$

Объединение здесь берётся внутри $(D^2)^m$. Для основных определений, касающихся момент-угол комплексов и их гомотопических свойств мы отсылаем читателя к [6, Главы 4, 8].

В работах Денама–Сучю [7] и Грбич–Линтон [9] доказано, что момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ имеет в $H^8(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$ нетривиальное произведение Масси классов из $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$ тогда и только тогда, когда симплициальный комплекс \mathcal{K} содержит в качестве подграфа один из восьми «препятствующих» графов, указанных на рис. 1.

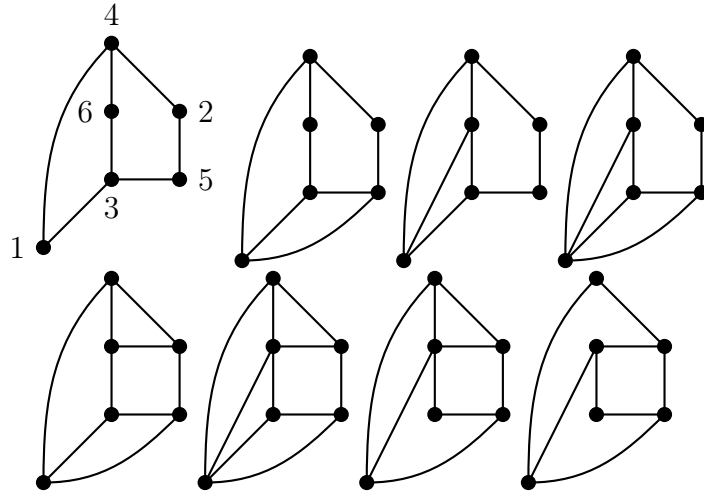


Рис. 1. Графы препятствий

В работе [16] было произведено вычисление соотношений в алгебрах Понтрягина $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующим флаги-зациям всех восьми графов, найдены все соотношения в степенях ≤ 6 (среди которых есть и кубические, что подтверждало неформальность пространств), однако вопрос об отсутствии других соотношений оставался открытым. При помощи результатов, описанных выше, этот вопрос можно разрешить следующим образом. Из формулы Хохстера для подсчёта когомологий [8] следует, что для всех восьми $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ ненулевые приведённые рациональные когомологии могут быть ненулевыми только в степенях $3 \leq k \leq 8$, поэтому для всякой A_{∞} -структуры на $\check{H}^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$ по причинам градуировки справедливо $m_i = 0$, $i \geq 4$, а m_3 может быть нетривиально только

на тройке классов из $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$ (где в образе оно имеет, с точностью до элементов из образа m_2 , представитель нетривиального произведения Масси). По следствию 2 прочих соотношений, кроме указанных в [16], не существует. Таким образом, полностью завершено вычисление алгебр Понтрягина этих пространств, к примеру, для флагизации \mathcal{K} шестого по счёту графа на рис. 1 (того, где больше всего рёбер), мы получаем факторалгебру

$$\begin{aligned} H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{243}, b_{354}, b_{465}) / \\ \langle [a_{23}, a_{56}], [a_{12}, a_{56}], [a_{12}, a_{45}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}], [a_{12}, b_{465}], [a_{56}, b_{132}], \\ [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{132}, b_{465}] \rangle. \end{aligned}$$

Такой метод вычисления в принципе применим для всякого односвязного пространства, если известны его рациональные когомологии и имеющиеся соотношения в рациональной алгебре Понтрягина каким-либо образом удалось вычислить. Наши результаты позволяют доказывать лишь отсутствие или, когда удалось установить нетривиальность какого-либо m_i , наличие соотношений определённой степени, но не говорят ничего о виде такого соотношения.

Схожие результаты можно также получить в контексте минимальных моделей пространства, соотношений в гомологиях и коформальности. Для связного пространства X существует минимальная алгебра M_X над \mathbb{Q} и квазиизоморфизм $M_X \rightarrow A_{PL}X$, где $A_{PL}X$ — PL формы де Рама на X . Если X — нильпотентное пространство с рациональными гомологиями конечного типа, то M_X имеет конечный тип, и определена минимальная коалгебраическая модель C_X как двойственная коалгебра к M_X .

Заметим, что в случае симметрической коалгебры $S(V)$ всякий дифференциал d на ней также допускает разложение $\text{rg}_V \circ d$ в сумму d^i , где компонента с номером i действует как $\text{rg}_V \circ d$ на симметрических произведениях ровно i примитивных элементов, и равна нулю на всех прочих элементах. Здесь rg_V есть проекция $S(V) \rightarrow V$.

В этом новом контексте аналогом теоремы 3 служит следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть C — минимальная DG-коалгебра, без учёта дифференциала совпадающая с симметрической коалгеброй $S(V)$ на DG-векторном пространстве V . Тогда на $s^{-1}HPC$ существует структура минимальной L_∞ -алгебры $\ell = (\ell_2, \ell_3, \dots)$, со следующим свойством. Если $d^n(v_1 \vee \dots \vee v_n) = v$, то для $\bar{\ell}_n = s \circ \ell_n$ справедливо $\bar{\ell}_n(\bar{v}_1 \vee \dots \vee \bar{v}_n) = \bar{v}$, где \bar{x} есть цикл с представителем x .

Доказательство. Рассмотрим примитивную фильтрацию на C , определяемую индуктивно следующим образом:

- (1) $F^n(C) = 0$, $n < 0$;
- (2) $F^0(C) = k$;
- (3) $F^{n+1}(C) = \text{Im}(i_n \oplus (V \circ (i_{PC} \otimes i_n)) : F^n(C) \oplus (PC \otimes F^n(C)) \rightarrow C)$, где i_{PC} — вложение $PC \subseteq C$, i_n — вложение $F^n(C) \subseteq C$, \vee — симметрическое умножение, определённое на $S(V)$.

Иными словами, элементы $F^n(C)$ — это элементы C , представимые в виде суммы произведений не более n примитивных элементов. Она порождает спектральную последовательность коалгебр с $E^0(C) = S(V)$, $E^1(C) = S(HV) = S(HPC)$, $E^1_{1,n} = H_{n+1}PC$. Рассмотрим отображения, задаваемые следующей

диаграммой для каждого целого $r \geq 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} (HPC)_{n+r+1}^{\otimes(r+1)} & \xrightarrow{\pi} & S(HPC) & \longrightarrow & E_{r+1,n}^1 & \xrightarrow{\bar{d}_r} & E_{1,n+r-1}^1 & \xrightarrow{=} & H_{n+r}PC \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & E_{r+1,n}^r & \xrightarrow{d_r} & E_{1,n+r-1}^r & & \end{array}$$

Под $(HPC)_{n+r+1}^{\otimes(r+1)}$ понимаются все элементы степени $n+r+1$ в $(HPC)^{\otimes(r+1)}$. Как и в теореме 3, вертикальные стрелки обозначают канонические проекции, π есть стандартная проекция $T(V) \rightarrow S(V)$, стрелка $S(HPC) \rightarrow E_{r+1,n}^1$ есть также каноническая проекция, d_r — дифференциал спектральной последовательности, а \bar{d}_r произвольно замыкает квадрат по коммутативности. Обозначим $\bar{\ell}_{r+1} : (HPC)^{\otimes(r+1)} \rightarrow HPC$ отображения, действие которых на компоненте $(HPC)_{n+r+1}^{\otimes(r+1)}$ задаётся композицией всех отображений в верхней строке.

Вычисление производится аналогично таковому в теореме 3. Действительно, элементы $x \in E_{r+1,n}^r$ после можно воспринимать, исходя из определения $E_{r+1,n}^r$, как элементы, содержащие слагаемые (степени $n+r+1$) длины ровно $r+1$ от примитивных элементов, причём действие d_r будет отождествляться с действием компоненты d^{r+1} дифференциала на C . Так как π симметрична, то $\bar{\ell}_i$ также удовлетворяют свойству симметрии

$$\bar{\ell}_i(v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}) = \varepsilon(\tau) \bar{\ell}_i(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Для доказательства обобщённых тождеств Якоби воспользуемся леммой 1. Положив в ней $f = \mathbf{id} : C \rightarrow C = S(V)$, мы заключим следующее. Если понимать дифференциал d на C как продолжение его ограничения $d|_V$ как кодеривации на всю C , то по этой же лемме $\mathrm{pr}_{V^{\vee n}} \circ d$ можно также задать отображением $\vee \circ (\sum_{i+j=n} (\mathrm{pr}_V \circ d^i|_V) \otimes \mathrm{id}^{\otimes j}) \circ \Delta_C|_{V^{\vee n}}$, где pr_V — проекция $S(V) \rightarrow V$. Так как $d \circ d = 0$, то

$$0 = d^m \circ (\mathrm{pr}_{V^{\vee n}} \circ d) = d \circ \vee \circ \left(\sum_{i+j=n} (\mathrm{pr}_V \circ d^i|_V) \otimes \mathrm{id}^{\otimes j} \right) \circ \Delta_C|_{V^{\vee n}}.$$

Применим отображение в правой части к элементу $v_1 \vee \cdots \vee v_n$, где $v_i \in V$. Воспользуемся формулой для коумножения (2), а также тем, что $\bar{\ell}_i$ действуют, как компоненты d^i , как обсуждалось выше. Получим равенство

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\tau \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \varepsilon(\tau) \bar{\ell}_j(\bar{\ell}_i(v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(i)}) \otimes v_{\tau(i+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}) = 0.$$

Таким образом, отображения $\ell_n = (s^{-1})^{\otimes n} \circ \bar{\ell}_n \circ s$ удовлетворяют тождествам Якоби по предложению 2, а потому задают L_∞ -структуру. \square

Пусть C_X — минимальная коалгебраическая модель односвязного пространства с рациональными гомологиями конечного типа. Известный результат говорит, что имеется изоморфизм алгебр Ли $s^{-1}PC \cong \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ (это доказывается рассмотрением спектральной последовательности для $\mathcal{L}(C_X)$, фильтрованного по второй компоненте бистепени, см. [2]). Так же, как и в случае с теоремой 3 аналог следствия 2 для L_∞ -структуры.

Следствие 3. Пусть X — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Тогда на $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ существует структура минимальной L_∞ -алгебры $\ell = (\ell_2, \ell_3, \dots)$, где ℓ_2 соответствует произведению Самельсона. Отображения ℓ_n связаны с компонентами d^n разложения дифференциала на C_X , как в теореме 4. Наличие (отсутствие) соотношений определённой длины в $H_*(X; \mathbb{Q})$ равносильно нетривиальности (соотв. тривиальности) соответствующей операции ℓ_n на $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$.

Замечание. Результаты этого раздела можно также распространить на неодносвязный случай. Пусть X — нильпотентное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Как обсуждалось, для такого X существует модель C_X , однако нет гарантии существования модели Квиллена L_X . В таком случае PC_X изоморфна

$$(4) \quad \mathfrak{l}(\pi_1(X) \otimes \mathbb{Q}) \oplus \bigoplus_{i \geq 2} (\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}),$$

где $\mathfrak{l}(\pi_1(X) \otimes \mathbb{Q})$ — алгебра Ли пополнения Мальцева ([4, Приложение А3]). В случае существования L_X это совпадает с sHL_X . Теоремы 3 и 4 дают A_∞ -структуру на $\tilde{H}_*(X; \mathbb{Q})$ (когда существует L_X) и L_∞ -структуру на (4) соответственно.

3.2. Критерии формальности. Как продолжение идей Каледина, мы найдём полезным формулировку результатов, не включающую присоединение формальной переменной.

Комплекс $\text{Coder}(\overline{T}sA)$ снабжён фильтрацией, где $F^k \text{Coder}(\overline{T}sA)$ есть все кодеривации, равные нулю вне $\bigoplus_{j \geq k} (sA)^{\otimes j}$.

Пусть (A, m_A) — минимальная плоская A_∞ R -алгебра, и $m_A = m_2 + m_3 + \dots$ — разложение m_A как кодеривации, и пусть

$$\tilde{m}_A = m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots$$

Кодеривация \tilde{m}_A является коциклом относительно дифференциала $[m_A, \cdot]$, а, значит, определяет класс в $H^1(F^1 \text{Coder}(\overline{T}sA))$, который мы обозначим \tilde{K}_A . Аналогично мы определим усечённый класс $\tilde{K}_{A,n}$ в $H^1(F^1 \text{Coder}(\overline{T}s\tilde{A})/F^{n+1})$, задаваемый представителем

$$\tilde{m}_{A,n} = m_3 + 2m_4 + \dots + (n-1)m_{n+1},$$

Следующее утверждение показывает, что \tilde{K}_A и $\tilde{K}_{A,n}$ непосредственно связаны с классическими классами Каледина $K_{\tilde{A}}$, $K_{\tilde{A}/h^{n+1}}$.

Лемма 2. В указанных выше условиях класс \tilde{K}_A ($\tilde{K}_{A,n}$) обращается в ноль тогда и только тогда, когда $K_{\tilde{A}}$ (соотв. $K_{\tilde{A}/h^{n+1}}$) обращается в ноль.

Доказательство. Условие обращения в ноль класса Каледина эквивалентно существованию элемента t степени 0 в комплексе Хохшильда \tilde{A} такого, что $[m_A, t] = \partial_h t$. Запишем t в разложении по степеням h :

$$t = t_1 + t_2 h + t_3 h^2 + \dots$$

Тогда условие на t преобразуется как

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 2} [m_i, t_j] h^{i+j-3} = \sum_{j \geq 3} (j-2) m_j h^{j-3}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{i \geq 2} [m_i, t_{n+3-i}] h^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) m_{n+3} h^n,$$

откуда приравниванием слагаемых при равных степенях h и сдвигом индекса n получим

$$(5) \quad \sum_{i \geq 2} [m_i, t_{n-i}] = (n-2) m_n, \quad n \geq 3,$$

где можно считать, что t_j имеет арность j (т.е. равно нулю вне $\tilde{A}^{\otimes j}$). С другой стороны, условие обращения в ноль класса \tilde{K}_A означает существование кодерирации $t = t_1 + t_2 + \dots$ степени 0 такой, что $[m_A, t] = \tilde{m}_A$, где t_j — компонента арности j . Расписывая это условие, получаем равенство, идентичное (5). Утверждение про усечённые классы доказывается совершенно аналогично. \square

Заметим, что \tilde{K}_A рассматривается как класс когомологий в $F^1 \text{Coder}(\overline{T}sA)$. Его представитель \tilde{m}_A , конечно, задаёт класс в $H^1(\text{Coder}(\overline{T}sA))$, но он всегда равен нулю, как мы увидим далее.

Определение 9. Пусть заданы A_∞ R -алгебры (A, m_A) , (B, m_B) и A_∞ -морфизм $f : A \rightarrow B$. Определим α_f равенством

$$\alpha_f(a) = (\deg a + 1) f_1(a),$$

где f_1 есть первая компонента морфизма f . Символом α_A будем обозначать α_{id_A} .

Если алгебры минимальны, то это также обеспечит согласие α_f со структурами цепных комплексов на A и B . Важным свойством α_A является следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть β — кодерирация на $\overline{T}sA$, имеющая только компоненту арности p . Тогда справедливо

$$[\beta, \alpha_A] = (p - \deg \beta - 1) \beta,$$

где $\deg \beta$ — степень β как однородного отображения. Причём в $\text{Coder}(\overline{T}sA)$ выполнено $[m_A, \alpha_A] = \tilde{m}_A$.

Доказательство. Первое следует непосредственно из определения градуированного коммутатора $[\cdot, \cdot]$. Второе следует из первого и того, что

$$[m_A, \alpha_A] = \sum_{i \geq 2} [m_i, \alpha_A] = \sum_{i \geq 2} (i-2) m_i = \tilde{m}_A.$$

\square

Как следствие, класс $[\tilde{m}_A]$ равен нулю в $H^1(\text{Coder}(\overline{T}sA))$. С A_∞ -морфизмом $f : A \rightarrow B$ мы свяжем комплекс

$$\text{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B) = \{ \alpha \in \text{Hom}_R^*(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B) : \Delta \alpha = (\alpha \otimes f + f \otimes \alpha) \Delta \}$$

с дифференциалом $d\alpha = m_B \alpha - (-1)^{\deg \alpha} \alpha m_A$. Он как и комплекс Хохшильда снабжён фильтрацией, где $F^p \text{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B)$ есть морфизмы с нулевыми компонентами арности $\leq p$. Нетрудно понять, что если $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ — A_∞ -морфизмы, то они индуцируют морфизмы фильтрованных комплексов

$$f^* : \text{Coder}_f(\mathcal{B}B, \mathcal{B}C) \rightarrow \text{Coder}_{gf}(\mathcal{B}A, \mathcal{B}C) \leftarrow \text{Coder}_g(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B) : g_*.$$

С комплексом $\text{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B)$ мы свяжем спектральную последовательность $E_r^{*,*}(A, B, f)$.

Далее мы будем считать, что $R = k$ — поле характеристики ноль.

Лемма 4. *Если $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ — квазиизоморфизмы A_∞ -алгебр, то индуцированные морфизмы g_* , f^* спектральных последовательностей являются изоморфизмами, начиная с первых их листов.*

Доказательство. По теореме Кюннета

$$E_1^{p,q}(A, B, f) \cong \text{Hom}_k^{p+q}(\mathcal{B}HA, \mathcal{B}HB)$$

и аналогично

$$E_1^{p,q}(A, C, gf) \cong \text{Hom}_k^{p+q}(\mathcal{B}HA, \mathcal{B}HC),$$

откуда сразу следует утверждение леммы. \square

Для минимальных алгебр мы можем рассматривать α_f как элемент $E_1^{1,-1}(A, B, f) \cong \text{Hom}_k^0(A, B)$.

Лемма 5. *Обозначим d_1 — дифференциал на $E_1^{*,*}(A, B, f)$. Справедливо, что $d_1(\alpha_f) = 0$.*

Доказательство. Значение $d_1(\alpha_f)$ есть не что иное, как компонента арности 2 элемента $m_B \alpha_f - \alpha_f m_A$, где α_f воспринимается как кодеривация. Соответствующая компонента отображения $\alpha_f m_A$ имеет вид

$$a_1 \otimes a_2 \mapsto (\deg a_1 + \deg a_2 + 2)f_1((m_A)_2(a_1 \otimes a_2)),$$

а компонента отображения $m_B \alpha_f$ имеет вид

$$a_1 \otimes a_2 \mapsto (m_B)_2((\deg a_1 + 1)f_1(a_1) \otimes a_2) + (m_B)_2(a_1 \otimes (\deg a_2 + 1)f_1(a_2)),$$

что есть то же самое. \square

В частности, α_f определяет элемент в $E_2^{1,-1}(A, B, f)$. Важность класса α_f объясняется следующим утверждением.

Предложение 3. *Усечённый класс $\tilde{K}_{A,n}$ равен нулю тогда и только тогда, когда $d_r(\alpha_A) = 0$ при $r = 2, \dots, n$. Аналогично $\tilde{K}_A = 0 \Leftrightarrow \alpha_f$ — перманентный коцикл в спектральной последовательности.*

Для доказательства предложения нам понадобится следующая техническая лемма, употребляемая в [5, Предл. 4.5] без дополнительного обоснования.

Лемма 6. *Для минимальной A_∞ R -алгебры $\tilde{K}_{A,n} = 0$ тогда и только тогда, когда существует A_∞ -изоморфизм $(A, m_A) \rightarrow (A, m'_A)$, где $m'_2 = m_2$, и $m'_i = 0$ при $3 \leq i \leq n+1$.*

Доказательство. То, что первое утверждение есть следствие второго, следует из инвариантности класса \tilde{K}_A . Доказательство обратной импликации проводим индукцией по n . База $n = 1$ тривиальна. Если $\tilde{K}_{A,n} = 0$, то и $\tilde{K}_{A,n-1} = 0$, и по предположению индукции мы можем положить, что $m_A = m_2 + m_{n+1} + m_{n+2} + \dots$, и потому $\tilde{m}_A = (n-1)m_{n+1} + nm_{n+2} + \dots$. Так как \tilde{m}_A должно обращаться в ноль в арностях $\leq n+1$, то существует $t = t_2 + t_3 + \dots \in F^1 \text{Coder}(\mathcal{B}A)$ такая, что $[m_A, t] = \tilde{m}_A$ в арностях $\leq n+1$. В арности $n+1$ это означает, что $[m_2, t_n] = (n-1)m_{n+1}$. Тогда $m'_A = \exp(-\frac{t_n}{n-1})m_A \exp(\frac{t_n}{n-1})$ задаёт A_∞ -структуру на A и $\exp(\frac{t_n}{n-1})$ есть A_∞ -изоморфизм $(A, m'_A) \rightarrow (A, m_A)$. Как нетрудно проверить, $m'_i = m_i$ при $i \leq n$, и $m'_{n+1} = m_{n+1} - [m_2, \frac{t_n}{n-1}] = 0$. \square

Доказательство предложения. Если $\tilde{K}_{A,n} = 0$, то по лемме мы можем положить $m_3 = \dots = m_{n+1} = 0$, и $m_A = m_2 + m'$, где $m' \in F^{n+2} \text{Coder}(\mathcal{B}A)$. Пусть $2 \leq r \leq n$, а x — кодеривация, сосредоточенная в арности p такая, что $[m_A, x] \in F^{p+r} \text{Coder}(\mathcal{B}A)$. Мы имеем $[m_2, x] = 0$ и $[m_A, x] = [m', x]$, что лежит в $F^{p+r+1} \text{Coder}(\mathcal{B}A)$, откуда $d_r = 0$.

Докажем обратную импликацию. Из определения дифференциала d_r следует и нашего предположения $d_r(\alpha_A) = 0$, что существуют кодеривации $t_i = t_{i,2} + \dots + t_{i,i+1}$ такие, что

$$\sum_{j=2}^p [m_j, t_{i,p+1-j}] = \begin{cases} 0, & 2 \leq p \leq i, \\ im_{i+2}, & p = i + 1. \end{cases}$$

Полагая $m'_A = m'_2 + \dots + m'_n$, где $m'_i = \sum_{j=1}^i t_{j,i}$, получим, что $[m_A, m'_A]$ совпадает с \tilde{m}_A по модулю F^{n+2} , что показывает, что $\tilde{K}_{A,n} = 0$. \square

Таким образом, мы доказали следующее.

Теорема 5. *Положим, что (A, m_A) — минимальная A_∞ -алгебра. Следующие условия эквивалентны.*

- (1) A формальна (n -формальна);
- (2) $\tilde{K}_A = 0$ ($\tilde{K}_{A,n} = 0$);
- (3) $E_r^{*,*}(A, A)$ коллапсирует на E_2 ($E_2 = \dots = E_n$);
- (4) $d_r(\alpha_A) = 0$ для всех r (для $2 \leq r \leq n$).

Мы теперь исследуем спектральные последовательности, связанные с не тождественными A_∞ -морфизмами.

Лемма 7. *Пусть $f : (A, m_A) \rightarrow (B, m_B)$ — морфизм минимальных A_∞ -алгебр и $(m_A)_i = (m_B)_i = 0$ для $3 \leq i \leq n+1$. Тогда для спектральной последовательности $E_r^{*,*}(A, B, f)$ справедливо $d_r = 0$ для $r = 2, \dots, n$.*

Доказательство. Доказательство производится по индукции. Предполагаем, что $d_2 = \dots = d_{n-1} = 0$ и покажем, что $d_n = 0$. Элемент $x \in E_n^{p,*}$ представляется линейным отображением g арности p таким, что при продолжении его как кодеривации выполнено $m_B g - (-1)^{\deg g} g m_A \in F^{p+n} \text{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B)$. Запишем $m_A = (m_A)_2 + \tilde{m}_A$, где \tilde{m}_A есть сумма $\sum_{i \geq n+2} (m_A)_i$, и аналогично для B . Тогда $(m_B)_2 g - (-1)^{\deg g} g (m_A)_2 = 0$, поэтому $m_B g - (-1)^{\deg g} g m_A = \tilde{m}_B g - (-1)^{\deg g} g \tilde{m}_A \in F^{p+n+1} \text{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B)$, откуда $d_n(x) = 0$. \square

Эту лемму можно рассматривать как аналог леммы 6 для более общего класса морфизмов. Как следствие критерия формальности, мы получим следующий результат.

Предложение 4. *Пусть $f : (A, m_A) \rightarrow (B, m_B)$ — морфизм минимальных A_∞ -алгебр, причём $f_* : E_2^{p,1-p}(A, A) \rightarrow E_2^{p,1-p}(A, B, f)$ инъективно для всех $p \geq 3$ и B формальна. Тогда A формальна.*

Доказательство. Мы сразу можем считать, что $m_B = (m_B)_2$. Пусть $n \geq 3$ — наименьший номер такой, что $(m_A)_n \neq 0$. По лемме 7 $E_2^{*,*}(A, A) = E_{n-1}^{*,*}(A, A)$ и $E_2^{*,*}(A, B, f) = E_{n-1}^{*,*}(A, B, f)$, поэтому инъективность распространяется на $(n-1)$ -ые листы. Тогда для каждого $2 \leq k \leq n-1$ справедливо

$$f_*(d_k \alpha_A) = d_k f_*(\alpha_A) = d_k f^*(\alpha_B) = f^*(d_k \alpha_B) = 0,$$

откуда $d_k \alpha_A = 0$ при $2 \leq k \leq n - 1$. Поэтому A $(n - 1)$ -формальна и тогда с точностью до A_∞ -автоморфизма можно считать, что $(m_A)_n = 0$. Повторяя это рассуждение счётное число раз, мы приходим к утверждению предложения. \square

Данные результаты обобщаются совершенно аналогичным образом на случай L_∞ -алгебр. Для них также определяется комплекс Coder_f (комплекс Шевалле–Эйленберга), классы \tilde{K}_A и α_f . Полученные результаты дают результаты, применимые к формальности DG-алгебр и алгебр Ли при подстановке в утверждения соответствующих минимальных моделей. Мы продемонстрируем применимость результатов формальности, доказав следующие следствия.

Следствие 4. Пусть A, B — DG-алгебры. Тогда $A \oplus B$ формальна $\Leftrightarrow A$ и B формальны. Аналогичное утверждение справедливо для DG-алгебр Ли.

Доказательство. Следствие предложения 4, так как A (или B) есть прямое слагаемое A -модуля (соотв. B -модуля) $A \oplus B$. \square

Следствие 5. Если A, B — DG-алгебры, $H^*(B) \neq 0$, $A \otimes B$ формальна, тогда A формальна.

Доказательство. В алгебре B 1 не является кограницей, иначе если $1 = da$, то для любого коцикла $b \in B$ $d(ab) = b$. Поэтому есть разложение $B = k \oplus C$, где $dC \subseteq C$. Утверждение следует из следствия 4, так как A есть прямое слагаемое в $A \otimes B = A \oplus (A \otimes C)$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Neisendorfer, T. Miller. *Formal and coformal spaces*. Illinois Journal of Mathematics, vol. 22, no. 4. (1978), 565–580.
- [2] J. Neisendorfer. *Lie algebras, coalgebras and rational homotopy theory of nilpotent spaces*. Pacific Journal of Mathematics, vol. 74, no. 2 (1978), 429–460.
- [3] B. Reinhold. *L_∞ -algebras and their cohomology*. Emergent Scientist, vol. 3, no. 4 (2019).
- [4] D. Quillen. *Rational homotopy theory*. Annals of Mathematics, Second Series, vol. 90, no. 2 (1969), 205–295.
- [5] V. A. Lunts. *On formality of DG algebras (after Kaledin)*. arXiv:0712.0996.
- [6] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology*. Math. Surv. and Monogr., vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [7] G. Denham, A. I. Suciu. *Moment-angle complexes, monomial ideals and Massey products*. Pure and Applied Mathematics Quarterly, vol. 3, no. 1 (2007), 25–60.
- [8] B. Keller. *Introduction to A -infinity algebras and modules*. arXiv:math/9910179
- [9] J. Grbić, A. Linton. *Lowest-degree triple Massey products in moment-angle complexes*. arXiv:1908.02222v2
- [10] Melvin Hochster. *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes*. Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference). Dekker, New York (1977), 171–223.
- [11] F. Belchi, U. Buijs, J. M. Moreno-Fernández, A. Murillo. *Higher order Whitehead products and L -infinity structures on the homology of a DGL*. Linear Algebra and Its Applications, vol. 520 (2017), 16–31.
- [12] U. Buijs, J. M. Moreno-Fernández, A. Murillo. *A_∞ -structures and Massey products*. arXiv:1801.03408
- [13] D. Kaledin. *Some remarks on formality in families*. Mosc. Math. J. 7 (2007), no. 4, 643–652.
- [14] E. S. Chibrikov. *A right normed basis for free Lie algebras and Lyndon–Shirshov words*. Journal of Algebra, vol. 302, no. 2 (2006), 593–612.
- [15] Т. В. Кадеишвили. *Алгебраическая структура на гомологиях A_∞ -алгебры*. Сообщ. Акад. наук Груз. ССР., т. 108, 249–252.

- [16] В. А. Грауман. *Гомологии петель момент-угол комплексов, соответствующих флаговым комплексам*. Курсовая работа. URL: http://higeom.math.msu.su/course_papers/Grauman3.pdf.