



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)  
специалиста

**МНОГООБРАЗИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ТРЕХМЕРНЫМ  
ИДЕАЛЬНЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ МНОГОГРАННИКАМ**

Выполнила студентка  
602 группы  
Чевакова Дина Валерьевна

---

(подпись студентки)

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
Панов Тарас Евгеньевич

---

(подпись научного руководителя)

Москва  
2023

# Содержание

Введение	3
1. Начальные сведения	4
2. Частичные факторы (partial quotient)	7
3. Когомологии $M(P)$	11
4. Когомологическая жесткость малых накрытий над идеальными многогранниками.	14
5. Когомологии многообразий, соответствующие идеальным прямоугольным многогранникам и $k = 3$	19
Список литературы	25

В этой работе центральную роль играют идеальные прямоугольные многогранники в трёхмерном пространстве Лобачевского. Также в работе упомянуты результаты, связанные с ограниченными прямоугольными многогранниками. Оказывается, что теории описывающие кохомологии неких многообразий, соответствующих этим двум классам многогранников очень похожи. Напомним, что прямоугольные многогранники конечного объема в  $\mathbb{L}^n$  (к которым относятся и идеальные и ограниченные) с точностью до изометрии пространства определяются своим комбинаторным типом. В этой работе будут приведены общие результаты, касающиеся комбинаторного устройства обоих классов многогранников, а также конструкции многообразий соответствующих этим многогранникам (раздел 1 и 2). Далее следует кохомологическое описание частного случая таких многообразий (малых накрытий), получаемых склейкой четырёх копий идеального прямоугольного многогранника. А также доказывается кохомологическая жесткость этих многообразий (разделы 3 и 4). В разделе 5 вычисляются кольца кохомологий многообразий, получаемых склейкой восьми копий идеального прямоугольного многогранника.

# 1. Начальные сведения

В этом разделе будут приведены различные результаты о комбинаторном строении идеальных прямоугольных многогранников. Начнем с основных определений.

**Определение 1.1.** Вершина, лежащая на абсолюте  $\partial\mathbb{L}^n$ , называется *идеальной*.

**Определение 1.2.** Многогранник, все двугранные углы которого равны  $\frac{\pi}{2}$ , называется *прямоугольным*.

**Определение 1.3.** Многогранник без идеальных вершин называется *компактным*.

**Определение 1.4.** Многогранник, все вершины которого являются идеальными, называется *идеальным*.

Далее  $IR$ — класс идеальных прямоугольных многогранников. В работе [1] Э. Винберг показал, что в пространствах  $\mathbb{L}^n$  размерности  $n \geq 30$  не существует ограниченных коксетеровских многогранников. А. Колпаков показал, что многогранники класса  $IR$  могут быть реализованы только в гиперболическом пространстве  $\mathbb{L}^n$  размерности, не превышающей 6 ( $n \leq 6$ ) [2]. В дальнейшем нас будут интересовать классы трехмерных прямоугольных многогранников  $IR_3$  и компактных прямоугольных многогранников  $P_{Pog}$ . Результаты, представленные ниже, являются следствиями теорем Погорелова, Андреева, Ривина

**Теорема 1.5.** *Комбинаторный трехмерный многогранник  $P \neq \Delta^3$  может быть реализован как прямоугольный многогранник в  $\mathbb{L}^3$  тогда и только тогда, когда он является простым и не содержит 3- и 4-поясов.*

Пусть  $\Gamma^*(P)$  — граф смежности граней  $P$ .

**Теорема 1.6.**  $P \in IR_3 \iff \Gamma^*(P)$  — *четыреангуляция сферы без разделяющих (т.е. не ограничивающих никакую грань) циклов длины 4.*

**Замечание.** В работе [[3]] были изучены свойства таких графов, в частности в ней доказывалось, что 4-регулярные плоские графы — двудольные. Из

чего следует, что для многогранника класса  $IR_3$  всегда существует правильная шахматная раскраска его граней. *Правильной раскраске* идеального многогранника соответствует раскраска, в которой грани инцидентные одному ребру раскрашены в разные цвета.

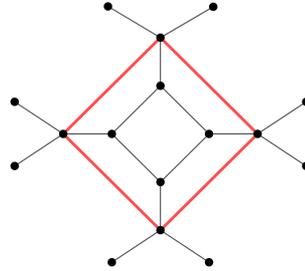


Рис. 1. Пример разделяющего цикла (выделен красным)

Каждая идеальная вершина трехмерного идеального прямоугольного многогранника инцидентна четырем ребрам. Действительно, рассмотрим идеальный многогранный конус, образованный идеальной вершиной многогранника и примыкающими к нему гранями, и опишем вокруг этой вершины орисферу. Тогда прямоугольная группа отражений, порожденная отражениями в гранях конуса, действует на орисферу. Причем фундаментальная область этого действия, совпадающая с многоугольником высекаемым конусом на сфере, имеет конечный объем. Так как орисфера изометрична евклидовой плоскости, получаем, что единственно возможная группа с таким действием – группа отражений в сторонах квадрата. Следовательно, в каждой вершине

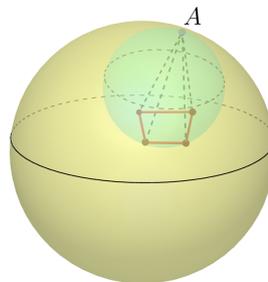


Рис. 2.  $A$  – идеальная вершина прямоугольного многогранника

сходится четыре грани (и четыре ребра), и  $2E = 4V$ . Учитывая формулу характеристики Эйлера  $V - E + F = 2$  (где  $V$  – количество вершин,  $E$  – количество ребер,  $F$  – количество граней), получим, что  $F = V + 2$ . Обозначим как  $p_k$  – количество  $k$ -угольных граней фиксированного многогранника класса  $IR_3$ . Тогда

$$p_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} p_k(k - 4) \quad (1)$$

**Следствие 1.7.** *Многогранник класса  $IR_3$  содержит не менее 8 треугольных граней.*

Простейший (содержащий наименьшее возможное число граней) многогранник класса  $IR_3$  – идеальный октаэдр  $A(3)$  (частный случай антипризмы  $A(n)$ ). Причем верно следующее обобщение этого факта:

**Теорема 1.8** ([4]). *Антипризма  $A(n)$  имеет наименьшее (равное  $2n + 2$ ) число граней среди всех идеальных прямоугольных гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну  $n$ -угольную грань, где  $n > 3$ .*

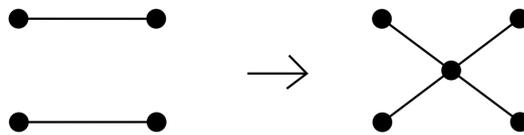


Рис. 3. Операция скручивания ребер

**Определение 1.9.** Операция скручивания ребер изображена на Рис.3. Два ребра слева принадлежат одной грани многогранника из  $IR_3$  и соединяют четыре различные вершины. Результатом является снова многогранник из  $IR_3$ .

Назовем скручивание ребер *крайним*, если ребра смежны с одним ребром, т.е. четыре вершины следуют друг за другом при обходе границы грани.

**Теорема 1.10** ([3]). *Любой многогранник из  $IR_3$  получается с помощью операций скручивания ребер из некоторой  $k$ -антипризмы,  $k \geq 3$ .*

**Теорема 1.11** ([5]). *Многогранник принадлежит  $IR_3$  тогда и только тогда, когда либо он является  $k$ -антипризмой,  $k \geq 3$ , либо получается из 4-антипризмы при помощи операций крайнего скручивания ребер.*

## 2. Частичные факторы (partial quotient)

**Определение 2.1.** Любому прямоугольному  $n$ -мерному многограннику  $P$  с  $m$ -гранями можно однозначно сопоставить *прямоугольную группу Кокстера*  $RC_P$ , образующие которой соответствуют отражениям в гипергранях  $P$ .

$$RC_P = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = e, g_i g_j = g_j g_i, \text{ если } F_i \cap F_j \neq \emptyset \rangle$$

Группа  $RC_P$  является при этом дискретной группой отражений и действует на  $\mathbb{L}^n$  замещениями с фундаментальной областью равной многограннику  $P$ .

**Конструкция 2.2** (Веснин). Пусть  $P$  —  $n$ -мерный компактный (или идеальный) прямоугольный многогранник. Рассмотрим эпиморфизм  $\varphi: RC_P \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$ ,  $k \geq n$  ( $k \geq n - 1$  соответственно). Подгруппа  $\text{Ker } \varphi \subset RC_P$  не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда образы отражений в любых гранях с общей вершиной (с общим ребром) линейно независимы в  $\mathbb{Z}_2^k$ . В таком случае группа  $\text{Ker } \varphi$  действует свободно на  $\mathbb{L}^n$ .

Накрытие  $M = \mathbb{L}^n / \text{Ker } \varphi$  — *гиперболическое  $n$ -многообразие*. Оно образовано  $|\mathbb{Z}_2^k| = 2^k$  копиями  $P$  и обладает Римановой метрикой с постоянной отрицательной кривизной. Многообразие  $M$  является асферическим (пространство Эйленберга-МакЛейна  $K(\text{Ker } \varphi, 1)$ ), поскольку его универсальное накрытие  $\mathbb{L}^n$  — стягиваемое. Гомоморфизм  $\varphi$  может быть представлен как композиция гомоморфизмов:

$$RC_P \xrightarrow{\text{ab}} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k \quad (2)$$

где  $\Lambda$  — линейное отображение, называемое  *$\mathbb{Z}_2$ -характеристической функцией* и задающееся матрицей  $k \times m$ .  $N = N(P, \Lambda)$  — *частичный фактор*, соответствующий многограннику  $P$  и характеристической функции  $\Lambda$ . Рассмотрим подробнее два случая, соответствующие  $k = n$  (*малые накрытия*) и  $k = m$  (*универсальные накрытия*).

**Конструкция 2.3** (малые накрытия над многогранниками класса  $IR_3$ ). Пусть многогранник  $P \in IR_3$  правильно раскрашен в два цвета. Тогда ма-

лым накрытием над  $P$  является многообразие  $M(P)$ :

$$M(P) = P \times \mathbb{Z}_2^2 / \sim$$

Где эквивалентность  $\sim$  склеивает  $(x, v)$  и  $(x, v + e_j)$ , если  $x$  лежит в грани  $F_i$ , раскрашенной в  $j$ -й цвет. Идеальные вершины  $P$  при этом склеиваются в каспы многообразия  $M(P)$ , линки которых гомеоморфны тору.

Малые накрытия над многогранниками класса  $IR_3$  можно наглядно представить в виде склейки четырех копий многогранника  $P$  по следующей диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} O_1 & \xleftrightarrow{B} & O_2 \\ \updownarrow \text{Ч} & & \updownarrow \text{Ч} \\ O_4 & \xleftrightarrow{B} & O_3 \end{array}$$

Рис. 4. Диаграмма склейки  $M(P)$

**Пример 2.4.** Рассмотрим  $M(A(3))$ ,  $A(3)$  — октаэдр. Покажем, что  $M(A(3))$ , заданное склейкой по диаграмме Рис.4 гомеоморфно  $S^3 \setminus L^6$ , где  $L^6$  — шестикомпонентное зацепление (см. Рис.5). Действительно, рассмотрим две перпендикулярные двумерные сферы  $S_1^2, S_2^2$ , вложенные в  $S^3$  и пересекающиеся по пунктирной окружности. Заметим, что они разбивают трехмерную сферу на четыре трехмерных диска. Пронумеруем компоненты нашего зацепления от 1 до 6 и вложим все компоненты с четными номерами в  $S_1^2$ , а с нечетными в  $S_2^2$ . Рассмотрим один из четырех дисков (Рис. 6 а)). После стягивания дуг окружностей в точки получим диаграмму Шлегеля для октаэдра (Рис. 6 б)).

Этот результат обобщен Терстоном [[6], стр. 31], показавшим, что четыре копии произвольной антипризмы  $A(n)$ , склеиваются по диаграмме как на рис. в дополнение к  $2n$ -компонентному цепному зацеплению до сферы  $S^3$ .

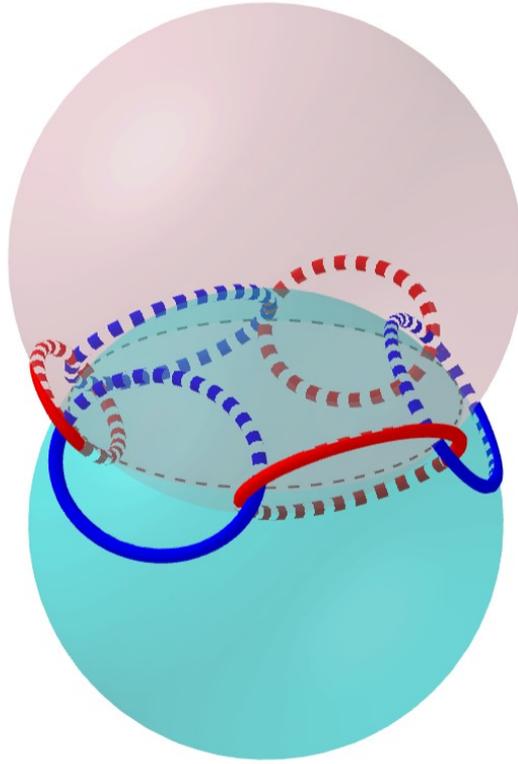
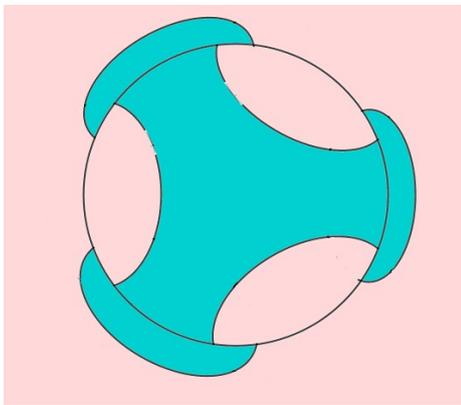
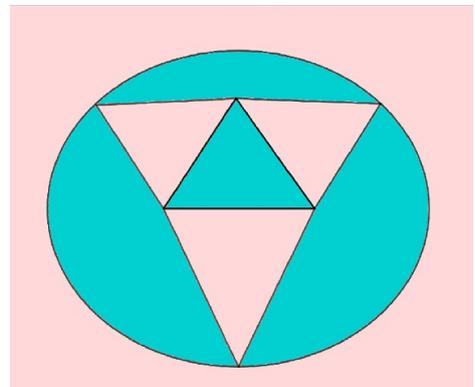


Рис. 5. К примеру 2.4. Вложение шестикомпонентного зацепления в две сферы



а)



б)

Рис. 6. К примеру 2.4. Граница диска одного из четырех дисков, отсекаемых от  $S^3$  перпендикулярными двумерными сферами  $S_{1,2}^2$ : а) до стягивания идеальных дуг; б) после стягивания идеальных дуг.

**Конструкция 2.5.** Многообразие

$$\mathcal{L}(P) = (P \times \mathbb{Z}_2^m) / \sim$$

где  $(x, v) \sim (x, v + e_i)$ , если  $x \in F_i, i = \overline{1, m}$ . является универсальным накры-

тием над  $P$ .

Заметим, что  $M(P, \Lambda) = \mathcal{L}(P)/_{\text{Ker } \Lambda}$ ;

**Определение 2.6.** Пусть  $A \subset X$  — пара CW-комплексов, а  $\mathcal{K}$  — симплициальный комплекс на  $[m]$ . Для  $I \subset [m]$  рассмотрим  $U_I = \prod_{i=1}^m Y_i \subseteq X^m$ , где

$$Y_i = \begin{cases} X, & \text{если } i \in I \\ A, & \text{если } i \notin I \end{cases}$$

Пространство  $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}(X, A) = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} U_I \subset X^m$  называется *полиэдральным произведением* пары  $(X, A)$ .

Также ведем обозначение

$$(X, pt)^{\mathcal{K}} = (X)^{\mathcal{K}}; \mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}} \text{ — вещественный момент-угол комплекс}$$

Любому прямоугольному многограннику  $P$  можно поставить в соответствие симплициальный комплекс  $\mathcal{K}_P$ , являющийся флагизацией графа смежности граней  $P$ . Если  $P \in IR_3$ , то

$$\mathcal{K}_P = \{\emptyset, i(i = \overline{1, m}), (i, j)(F_i \cap F_j \neq \emptyset)\}$$

**Предложение 2.7** ([7], ргор.6). Пусть  $P$  — прямоугольный многогранник конечного объема,  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$  — вещественный момент-угол комплекс, соответствующий симплициальному комплексу  $\mathcal{K}_P$ . Тогда существует деформационная ретракция:

$$h: \mathcal{L}(P) \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$$

Зададим действие  $\mathbb{Z}_2^m \curvearrowright \mathcal{L}(P)$ :

$$g \cdot (x, v) = (x, g + v)$$

По построению  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P} \subseteq \mathcal{L}(P)$  ( $\mathcal{C}$  в обозначениях [?]) является объединением симплексов барицентрического подразделения  $\mathcal{L}(P)$ , индуцированного из барицентрического подразделения  $P$ , следовательно  $\mathbb{Z}_2^m(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}) \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$ . То есть, отображение  $h$  эквивариантно относительно действия  $\mathbb{Z}_2^m$

### 3. Когомологии $M(P)$

Рассмотрим следующую конструкцию.

**Конструкция 3.1.** Пусть  $EG$  — универсальное  $G$ -пространство, т.е.  $EG$  стягиваемо и  $G$  действует на  $EG$  свободно справа. Пространство

$$X_G = EG \times_G X = (EG \times X) / G$$

называется *конструкцией Бореля* для пространства  $X$ . Здесь на  $EG \times X$  задано правое действие  $(e, x)g = (eg, g^{-1}x)$ . Таким образом

$$EG \times_G X = \{(e, x)\} / (eg, x) \sim (e, gx)$$

**Предложение 3.2.**

$$EZ_2^m \times_{\mathbb{Z}_2^m} \mathcal{L}(P) \cong EZ_2^2 \times_{\mathbb{Z}_2^2} M(P)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} EZ_2^m \times_{\mathbb{Z}_2^m} \mathcal{L}(P) &\cong EZ_2^m \times_H \mathcal{L}(P) /_{\mathbb{Z}_2^m/H} \cong EZ_2^m \times (\mathcal{L}(P)/_H) /_{\mathbb{Z}_2^m/H} \cong \\ &\cong EZ_2^2 \times_{\mathbb{Z}_2^2} M(P), \text{ где } H = \ker \lambda \cong \mathbb{Z}_2^2 \end{aligned}$$

□

Рассмотрим подробнее  $EZ_2^m \times_{\mathbb{Z}_2^m} \mathcal{L}(P)$ . Нетрудно показать (по аналогии с комплексным случаем [8]) что существует гомотопическая эквивалентность:

$$h : (\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\cong} (S^\infty \times_{S^0} \times D^1, S^\infty \times_{S^0} D^0)^{\mathcal{K}} = EZ_2^m \times_{\mathbb{Z}_2^m} \mathcal{R}_{\mathcal{K}}$$

Учитывая, что  $\mathcal{L}(P) \xrightarrow{\text{ретракт}} (D^1, S^0)^{\mathcal{K}_P}$ , получаем

$$(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}_P} \simeq BP$$

где  $BP \stackrel{\text{def}}{=} EZ_2^2 \times_{\mathbb{Z}_2^2} M(P)$ . Пространство  $(\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}$  называют *пространством Дэвиса-Янушкевича*.

**Определение 3.3.** *кольцом граней* (или кольцом Стэнли-Райснера) симплициального комплекса  $\mathcal{K}$  на  $m$ -вершинах называется градуированное фактор

кольцо  $\mathbb{k}[\mathcal{K}] = \mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]/I_{\mathcal{K}}$ , где  $I_{\mathcal{K}} = (v_I : I \notin \mathcal{K})$  идеал, порожденный теми мономами  $v_I$ , для которых  $I$  – не симплекс  $\mathcal{K}$ .

Идеал  $I_{\mathcal{K}}$  известен как идеал Стэнли-Райснера. Нас будет интересовать случай, когда  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P = \{\emptyset, i(i \in (1, m)), (i, j)(F_i \cap F_j \neq \emptyset)\}$ ,  $k = \mathbb{Z}_2$ . Тогда  $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]$  будет порождаться мономами вида  $v_i^l, v_i^l v_j^r (i, (i, j) \in \mathcal{K}_P)$ .

**Предложение 3.4.** (см. например, [8], параграф 4.3) кольцо когомологий пространства Дэвиса-Янушкевича над  $\mathbb{Z}_2$  изоморфно кольцу граней  $H^*((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}]$

Заметим, что кольцо граней  $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}]$  можно рассматривать также как алгебру над полем  $\mathbb{Z}_2$ , размерность Крулля которой равна  $\dim \mathcal{K} + 1$ .

Далее нам понадобится определение *линейной системы параметров* алгебры, для этой работы в качестве определения удобно взять следующее

**Определение 3.5.** пусть  $\mathcal{K}$  – симплициальный комплекс на  $[m]$  вершинах,  $\dim \mathcal{K} = n - 1$ .  $\Lambda : \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$  задается матрицей из столбцов  $\Lambda(e_i) = (\Lambda_{i,1}, \dots, \Lambda_{i,n})^T$ .

Определим  $n$  линейных элементов алгебры Стэнли-Райснера:

$$\theta_j = \Lambda_{1,j}v_1 + \dots + \Lambda_{m,j}v_m \in \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}]_2, j = 1, \dots, n.$$

Тогда последовательность  $\theta_1, \dots, \theta_n$  является линейной системой параметров в  $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}]$  тогда и только тогда, когда  $\Lambda$  – характеристическая функция.

**Определение 3.6** (Райснер). Пусть  $\mathbb{k}$  – поле. Симплициальный комплекс  $\mathcal{K}$  Коэн-Маколеев над  $\mathbb{k}$  тогда и только тогда, когда для каждого симплекса  $I \in \mathcal{K}$  (включая пустое множество) и  $i < \dim lk(I)$ , выполняется  $\widetilde{H}_i(lk(I); \mathbb{k}) = 0$ .

Заметим, что в нашем случае  $\dim \mathcal{K}_P = 1$ ,  $lk(i, j) = \emptyset$ ,  $lk(i) = \sqcup_{i=1}^N [pt]$ ,  $lk(\emptyset) = \vee_{i=1}^M S^1$ . То есть, если  $P \in IR_3$ ,  $\mathcal{K}_P$  – Коэн-Маколеев комплекс.

**Определение 3.7.** Алгебра  $\mathbb{k}[\mathcal{K}]$  – алгебра Коэн-Маколея над  $\mathbb{k}$ , если  $\mathcal{K}$  – комплекс Коэна-Маколея.

Алгебра Коэна-Маколея  $R$  – это алгебра, в которых любая однородная система параметров  $\theta_1, \dots, \theta_n$  является *регулярной последовательностью*,

то есть последовательностью в которой  $\theta_{i+1}$  не является делителем нуля в фактор-алгебре  $R/(\theta_1, \dots, \theta_i)$ . Где  $(\theta_1, \dots, \theta_i)$  — идеал, порожденный соответствующими элементами.

Пусть  $P \in IR_3$ . Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} EZ_2^2 \times M(P) & \xrightarrow{pr} & EZ_2^2 \\ \downarrow /_{\mathbb{Z}_2^2} & & \downarrow \mathbb{Z}_2^2 \\ BP = EZ_2^2 \times_{\mathbb{Z}_2^2} M(P) & \xrightarrow{p} & BZ_2^2 \end{array}$$

Тогда ее нижняя строчка — расслоение Серра  $p: BP \rightarrow BZ_2^2$  со слоем  $M(P)$ . Оно индуцирует следующее отображение первых когомологий:

$$\begin{aligned} H^1(BZ_2^n; \mathbb{Z}_2) &\xrightarrow{p^*} H^1(BP; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j^*} H^1(M(P); \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0 \\ p^* : t_i &\rightarrow \lambda_{i,1}v_1 + \dots + \lambda_{i,m}v_m = \theta_i. \end{aligned}$$

Имеется следующая теорема:

**Теорема 3.8.** Пусть  $K$  —  $(n-1)$ -мерный симплициальный комплекс Коэна-Маколея над  $\mathbb{Z}_2$ , а  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  регулярная последовательность элементов из  $H^1(BP)$ . Тогда спектральная последовательность Серра расслоения  $p$  вырождается во втором члене

$$\{E_2\}^{p,q} = \{E_\infty\}^{p,q}$$

*Доказательство.* В случае двухцветной раскраски проективная размерность  $H^*(M(P, \Lambda); \mathbb{Z}_2) = H^*(M(P); \mathbb{Z}_2)$  равна нулю, то есть элементы когомологии представляются классами, имеющие нулевой порядок по  $u_i$ . Тогда из вида действия (см. утверждение 5.4) следует, что фундаментальная группа базы  $\pi_1(BZ_2^2)$  действует на когомологии слоя  $H^*(M(P); \mathbb{Z}_2)$  тривиально. Далее аналогично с [[9], теорема 3.8] получаем, что спектральная последовательность вырождается во втором члене, а также верно:

$$H^*(BP; \mathbb{Z}_2) \simeq H^*(BZ_2^2; \mathbb{Z}_2) \otimes H^*(M(P); \mathbb{Z}_2)$$

□

Из сказанного выше следует следующее утверждение:

**Следствие 3.9.** Пусть  $J$  — однородный идеал в  $\mathbb{Z}_2[v_1, \dots, v_m]$  порожденный  $\theta_1, \theta_2$ . Тогда имеет место следующее утверждение

$$H^*(M(P), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[v_1, \dots, v_m]/I_{K_P} + J.$$

*Доказательство.* Пусть  $\bar{J}$  — образ  $J$  в кольце граней. Так как  $j^* : \mathbb{Z}_2[K_P] \rightarrow H^*(M(P); \mathbb{Z}_2)$  — сюръекция, а  $\bar{J}$  — ее ядро, то  $j^*$  индуцирует сюръекцию  $\mathbb{Z}_2[K_P]/\bar{J} \rightarrow H^*(M(P); \mathbb{Z}_2)$ . Более того,  $p^* : H^*(B\mathbb{Z}_2^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(BP; \mathbb{Z}_2)$  инъективно и  $\bar{J}$  отождествляется с образом  $p^*$ . Так как  $H^*(BP; \mathbb{Z}_2) \simeq H^*(B\mathbb{Z}_2^n) \otimes H^*(M(P); \mathbb{Z}_2) \Rightarrow H^*(M(P), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[v_1, \dots, v_m]/I_{K_P} + J$ .  $\square$

## 4. Когомологическая жесткость малых накрытий над идеальными многогранниками.

В предыдущих разделах для каждого идеального многогранника  $P$  было построено многообразие  $M(P)$  — малое накрытие над  $P$  и вычислено его кольцо когомологий  $H^*(M(P), \mathbb{Z}_2)$ . Очевидно, если  $P_1 = P_2$ , то  $H^*(M(P_1), \mathbb{Z}_2) = H^*(M(P_2), \mathbb{Z}_2)$ . Естественно задаться следующим вопросом: пусть для двух идеальных прямоугольных многогранников оказалось, что их кольца когомологий над  $\mathbb{Z}_2$  изоморфны  $H^*(M(P_1), \mathbb{Z}_2) = H^*(M(P_2), \mathbb{Z}_2)$ , следует ли из этого, что многогранники  $P_1$  и  $P_2$  эквивалентны? Если это верно, будем говорить, что класс многообразий является *когомологически жестким*. Следующая теорема устанавливает когомологическую жесткость класса малых накрытий над  $P \in P_{Pog}$ :

**Теорема 4.1** (Бухштабер, Ероховец, Масуда, Панов, Пак [10]). Пусть  $N = N(P, \Lambda)$  и  $N' = N(P', \Lambda')$  — два гиперболических 3-многообразия  $(\Lambda, \Lambda' : \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^3)$ , соответствующие прямоугольным трехмерным многогранникам  $P$  и  $P'$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) существует изоморфизм колец когомологий  $\varphi : H^*(N; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(N'; \mathbb{Z}_2)$ ;
- (b) существует диффеоморфизм  $N \cong N'$ ;
- (c) существует эквивалентность  $\mathbb{Z}_2$ -характеристических пар  $(P, \Lambda) \sim (P', \Lambda')$ .

Перед тем, как перейти непосредственно к формулировке и доказательству теоремы о кохомологической жесткости малых накрытий  $M(P)$  над  $P \in IR_3$ , упростим вид кохомологий  $H^*(M(P); \mathbb{Z}_2)$ .

**Лемма 4.2.**

$$H^*(M(P); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 [K_P \setminus \{1\} \cup \{2\}] / \underbrace{v_i^2=0, v_j}_{\substack{\sum_{i: F_i \cap F_j \neq \emptyset} v_i=0 \\ j \in [3, \dots, m] \setminus B_1 \cup B_2}}$$

где  $B_i$ :

$$B_i = \{l : F_l \cap F_i \neq \emptyset\} \quad (3)$$

*Доказательство.* Пусть  $F_1, \dots, F_m$  — грани многогранника  $P \in IR_3$ , раскрашенные в два цвета, а  $\{1\}, \{2\}$  — две соседние грани:

$$\{1\} \sqcup I_1 \text{ — черные грани} \quad (4)$$

$$\{2\} \sqcup I_2 \text{ — белые грани} \quad (5)$$

$$H^*(M(P); \mathbb{Z}_2) = \underbrace{\mathbb{Z}_2 [K_P] /_{r_b=0, r_w=0}}_W \cong \mathbb{Z}_2 [K_P \setminus \{1\} \cup \{2\}] /_{r_{bj}=0, r_{wk}=0} \quad (6)$$

$$r_b = v_1 + \sum_{i \in I_1} v_i; \quad r_w = v_2 + \sum_{i \in I_2} v_i \quad (7)$$

$$r_{bj} = v_j \sum_{i \in I_1} v_i; \quad r_{wk} = v_k \sum_{i \in I_2} v_i \quad (8)$$

Группы соотношений  $r_{wk} = 0$  и  $r_{bj} = 0$  получаются из соотношений вида  $v_1 v_j = 0$ ,  $v_2 v_k = 0$ , где  $F_j \cap F_1 = F_k \cap F_2 = \emptyset$ , с учетом соотношений  $r_b = 0$  и  $r_w = 0$ . При этом

$$v_j \in I_1 \Rightarrow v_j \sum_{i \in I_1} v_i = v_j^2 = 0; \quad (9)$$

$$v_k \in I_2 \Rightarrow v_k \sum_{i \in I_2} v_i = v_k^2 = 0; \quad (10)$$

Тогда получим:

$$W \cong \mathbb{Z}_2 [K_P \setminus \{1\} \cup \{2\}] / \underbrace{v_i^2=0, v_j \sum_{i \in I_1} v_i=0, v_k \sum_{i \in I_2} v_i=0}_{j \in I_2 \setminus B_1, k \in I_1 \setminus B_2} \quad (11)$$

$$W \cong \mathbb{Z}_2 [\mathcal{K}_P \setminus \{1\} \cup \{2\}] / \underbrace{v_i^2=0, v_j \sum_{i: F_i \cap F_j \neq \emptyset} v_i=0}_{j \in [3, \dots, m] \setminus B_1 \cup B_2} \quad (12)$$

Соотношения  $v_j \sum_{i: F_i \cap F_j \neq \emptyset} v_i = 0$  оказываются линейно независимы. Действительно, пусть существуют наборы  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_l\} \subset I_1$  и  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\} \subset I_2$ , такие, что

$$\sum_{q \in J} v_{j_q} \sum_{i: F_{j_q} \cap F_i \neq \emptyset} v_i + \sum_{q \in K} v_{k_q} \sum_{i: F_{k_q} \cap F_i \neq \emptyset} v_i = 0 \quad (13)$$

Это равенство возможно, если все произведения  $v_l v_n$ , где  $F_l \cap F_n \neq \emptyset$  встречаются в сумме дважды. Тогда вместе со слагаемым  $v_{j_0} \sum_{i: F_{j_0} \cap F_i \neq \emptyset} v_i$  в сумму входят все возможные  $v_p \sum_{i: F_p \cap F_i \neq \emptyset} v_i$ , где  $F_p \cap F_{j_0} \neq \emptyset$ , и т.д. . То есть

$$\forall j \in J: N_j \stackrel{\text{def}}{=} \{p | F_p \cap F_j \neq \emptyset, p \neq j\} \subset K \quad (14)$$

$$\forall k \in K N_k \subset J \quad (15)$$

Таким образом приходим к противоречию с условием  $J, K \subseteq [m] \setminus B_1 \cup B_2$ .  $\square$

**Теорема 4.3.** Пусть  $M = M(P, \Lambda)$  и  $M' = M(P', \Lambda')$  — два гиперболических 3-многообразия  $(\Lambda, \Lambda': \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^2)$ , соответствующие идеальным прямоугольным трехмерным многогранникам  $P$  и  $P'$ . Следующие условия эквивалентны:

- (a) существует изоморфизм колец когомологий  $\varphi: H^*(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H^*(M'; \mathbb{Z}_2)$ ;
- (b) существует диффеоморфизм  $M \cong M'$ ;
- (c)  $P = P'$ .

*Доказательство.* Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — два различных идеальных многогранника с одинаковым числом граней, раскрашенные в два цвета.

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_{P_1} \setminus \{1\} \cup \{2\} \quad (16)$$

$$K_2 = K_{P_2} \setminus \{1\} \cup \{2\} \quad (17)$$

И пусть существует изоморфизм  $\varphi$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_1] / \langle v_i^2=0, v_j \sum_{F_j \cap F_i \neq \emptyset} v_i=0 \rangle &\rightarrow \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_2] / \langle \tilde{v}_i^2=0, \tilde{v}_q \sum_{\tilde{F}_q \cap \tilde{F}_i \neq \emptyset} \tilde{v}_i=0, l = \overline{3, m'} \rangle \\ j \in [3, \dots, m] \setminus B_1 \cup B_2, q \in [3, \dots, m'] \setminus \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2 \end{aligned} \quad (18)$$

причем  $m = m'$ . Тогда  $\varphi$  может быть записан следующим образом:

$$\varphi(v_i) = \sum_{j \in A_i} \tilde{v}_j \quad (19)$$

Пусть  $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}_2[v_3, \dots, v_m] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_2[v'_3, \dots, v'_m]$  — изоморфизм, замыкающий коммутативную диграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_1] / \langle v_i^2=0, v_j \sum_{F_j \cap F_i \neq \emptyset} v_i=0 \rangle & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_2] / \langle \tilde{v}_i^2=0, \tilde{v}_q \sum_{\tilde{F}_q \cap \tilde{F}_i \neq \emptyset} \tilde{v}_i=0 \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2[v_3, \dots, v_m] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{Z}_2[v'_3, \dots, v'_m] \end{array}$$

Обозначим

- $R_1 = \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_1] / \langle \text{все многочлены степени старше } 2 \rangle$ , аналогично для  $R_2$ ;
- $I : v_i^2 = 0$ , аналогично для  $\tilde{I}$ ;
- $J : v_j \sum_{F_j \cap F_i} v_i = 0$ , аналогично для  $\tilde{J}$ .

В этих обозначениях  $H^*(M(P_1); \mathbb{Z}_2) = R_1 / I_{+J}$ ,  $H^*(M(P_2); \mathbb{Z}_2) = R_2 / \tilde{I}_{+\tilde{J}}$ . При этом  $I \cap J = \emptyset$ ,  $I_{\mathcal{K}_1} \cap I = I_{\mathcal{K}_1} \cap J = \emptyset$ ,  $\tilde{I} \cap \tilde{J} = \emptyset$ ,  $\tilde{I}_{\mathcal{K}_2} \cap \tilde{I} = \tilde{I}_{\mathcal{K}_2} \cap \tilde{J} = \emptyset$ . Над  $\mathbb{Z}_2$  верно:

$$\tilde{\varphi}(v_i^2) = \sum_{j \in A_i} \tilde{v}_j^2 \quad (20)$$

то есть  $\tilde{\varphi}(I) = \tilde{I}$ , тогда существует изоморфизм  $\tilde{\varphi}: R_1/J \rightarrow R_2/\tilde{J}$ , замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R_1/J & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & R_2/\tilde{J} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2[v_3, \dots, v_m] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{Z}_2[v'_3, \dots, v'_m] \end{array}$$

Теперь рассмотрим образ произведения  $v_i v_j$ :  $v_i, v_j \in R_1/J$ :

- Пусть  $v_i v_j = 0$  ( $F_i \cap F_j = \emptyset$ ).  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , поскольку в противном случае имеем противоречие  $\tilde{\varphi}(v_i v_j) = \sum_{p \in A_i} \tilde{v}_p \sum_{q \in A_j} \tilde{v}_q \neq 0$
- Пусть  $v_i v_j \neq 0$  ( $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ ,  $j \in N_i$ ). Тогда найдется соотношение, содержащее  $v_i$  и  $v_j$ . Рассматриваемые многогранники удовлетворяют не- $\Delta$  условию ( $\forall i F_{j_1} \cap F_{j_2} = \emptyset$ ,  $j_1, j_2 \in N_i$ ). Также выше было установлено, что несмежные грани переходят в суммы по непересекающимся наборам граней. Тогда получим:

$$\tilde{\varphi}(v_i) \tilde{\varphi} \left( v_j + \sum_{l \in N_i \setminus j} v_l \right) = \sum_{p \in A_i} \tilde{v}_p \sum_{q \in A_j \sqcup_{l \in N_i \setminus j} A_l} \tilde{v}_q = 0 \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \quad (21)$$

Таким образом получаем, что  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i, j = \overline{3, m}$ ,  $i \neq j$ . Откуда следует  $|A_i| = 1$ , т.е.  $\tilde{\varphi}: v_i \mapsto \tilde{v}_{\sigma(i)}$ , где  $\sigma(i)$ —перестановка элементов  $\{3, \dots, m\}$ . Тогда  $\tilde{\varphi}$  продолжается до изоморфизма между  $R_1$  и  $R_2$ . Т.к. кольцо граней  $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_1]$  определяется в градуировках 1 и 2, то этот изоморфизм продолжается до изоморфизма между  $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_1]$  и  $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_2]$  и

$$\mathcal{K}_{P_1 \setminus \{1\} \cup \{2\}} = \mathcal{K}_{P_2 \setminus \{1\} \cup \{2\}} \quad (22)$$

Т.к. рассуждение выше верно для  $K_{P \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}}$ , где  $F_{i_0} \cap F_{j_0} \neq \emptyset$ , то  $P_1 = P_2$ .  $\square$

## 5. Когомологии многообразий, соответствующие идеальным прямоугольным многогранникам и $k = 3$

В разделе 3 было показано, что алгебра граней многогранника из  $IR_3$  является алгеброй Коэна-Маколея, так как симплициальный комплекс  $\mathcal{K}_P$  — комплекс Коэна-Маколея.

Так как  $\dim \mathcal{K}_P = 1$ , размерность Круля алгебры граней равна двум, то алгебра граней  $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]$  может быть свободным модулем над полиномиальной алгеброй  $\mathbb{Z}_2[\theta_1, \dots, \theta_l]$ , только если  $k \leq 2$ . Если  $M = M(P, \lambda)$ , где  $\lambda$  — раскраска в  $k$  цветов, где  $k > 2$ , то кольцо когомологий  $H^*(M, \mathbb{Z}_2)$  не является свободным модулем над  $H^*(B\mathbb{Z}_2^l; \mathbb{Z}_2)$  и не выражается формулой (3.9). Тем не менее, в работе [11] была построена дифференциально-градуированная алгебра коцепей многообразия  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/\text{Ker } \Delta$  над полем  $\mathbb{k}$ . Заметим, что она изоморфна алгебре коцепей частичных факторов, так как эти пространства гомотопически эквивалентны (следствие эквивариантности деформационной ретракции из  $\mathcal{L}(P)$  в  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$ ). Описание когомологий этой алгебры в случае многообразий над трехмерными многогранниками класса  $IR_3$  и  $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_2$ ,  $k = 3$  будет дано ниже. Пока дадим следующее описание аддитивной структуры кольца когомологий.

**Утверждение 5.1** ([11]). *Для многообразия  $M(P, \lambda)$ , где  $\lambda$  — раскраска в  $k$  цветов, верно*

$$\begin{aligned} H^*(M(P, \lambda); \mathbb{Z}_2) &= H^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/\text{Ker } \Delta; \mathbb{Z}_2) = \\ &= \text{Tor}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i,j} \text{Tor}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)}^{-i,j}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}], \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

**Определение 5.2.** *Проективной размерностью  $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]$  как модуля над  $H^*(B\mathbb{Z}_2^k)$  будем называть*

$$\text{pdim}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = \max \left\{ i : \text{Tor}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)}(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P], \mathbb{Z}_2) \neq 0 \right\}$$

**Утверждение 5.3.** *пусть  $M = M(P, \lambda)$ , где  $P \in IR_3$ , а  $\lambda$  — раскраска в  $k$  цветов. Тогда  $\text{pdim}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = k - 2$*

*Доказательство.* Доказательство немедленно следует из формулы Ауслендера-

Буксбаума

$$p\dim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^k)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] + \text{depth } M = \text{depth } H^*(B\mathbb{Z}_2^k),$$

причем  $\text{depth } M, H^*(B\mathbb{Z}_2^k)$  совпадают с их размерностями Круля (свойство Коэна-Маколеевости) и равны 2 и  $k$  соответственно.

□

Далее дадим описание алгебры коцепей частичного фактора  $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/\text{Ker } \Lambda$ , где  $\Lambda: \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$  — характеристическая функция

**Утверждение 5.4** ([11]).

$$C^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/\text{Ker } \Lambda; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}] \otimes \mathcal{F}(\mathbb{Z}_2^k) \quad (23)$$

где  $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_2^k)$  — алгебра с единицей, порожденная функциями  $u_1, \dots, u_k: \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \{0, 1\}$ , то есть верно

$$\begin{aligned} u_i^2 &= u_i; u_i u_j = u_j u_i \\ v_i v_j &= v_j v_i \quad (\text{из коммутативности } \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}]) \end{aligned}$$

Также накладывается дополнительное соотношение

$$v_i u_j = u_j v_i + \lambda_{i,j} v_i,$$

а дифференцирование выполняется по правилу

$$du_i = \sum \lambda_{i,j} v_j, dv_i = 0, d1 = 0$$

и  $\text{bideg } u_i = (-1, 0)$ ,  $\text{bideg } v_i = (0, 1)$ . Действие  $\mathbb{Z}_2^k$  на  $C^*(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/\text{Ker } \Lambda; \mathbb{Z}_2)$  определяется естественным действием на функции  $\mathbb{Z}_2^k \rightarrow \{0, 1\}$ .

Применим ДГА-модель для случая  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ ,  $P \in IR_3$ ,  $k = 2$  — мало-го накрытия  $M(P)$  и вычислим его кольцо когомологий над  $\mathbb{Z}_2$ . Для этого последовательно вычислим все коцепи и кограницы в описанном коцепном комплексе. Так как  $p\dim_{H^*(B\mathbb{Z}_2^2)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = 0$ , то в дальнейшем можно отбросить все коцепи, имеющие ненулевой порядок по  $u_j$ .

$$C^3 \xleftarrow{d_3} C^2 \xleftarrow{d_2} C^1 \xleftarrow{d_1} C^0 \quad (24)$$

$\text{Im } d_0 = \mathbb{Z}_2 \langle du_1, du_2 \rangle$ ,  $\text{Ker } d_1 = \mathbb{Z}_2 \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ,  $\text{Im } d_1 = \mathbb{Z}_2 \langle v_i \otimes du_j \rangle$   
 $\text{Ker } d_2 = (\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_2$  — кольцо граней в градуировке 2

$$H^*(M(P); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}[\mathcal{K}_P] / \sum \lambda_{i,j} v_j$$

что согласуется с результатом, приведенным в следствии 3.9.

Теперь рассмотрим частичный фактор, соответствующий  $\Lambda^m: \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ . Так как  $\text{pdim}_{H^*(B\mathbb{Z}_2^3)} \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P] = 1$ , то в дальнейшем можно отбросить все коцепи, имеющие более чем линейный порядок по  $u_i$ . Введем обозначения:

$$f_l = d(u_l) = \sum_{j=1}^m \lambda_{l,j} v_j, \quad l = \overline{1, 3} \quad (25)$$

$$f_{12} = d(u_1 u_2) = f_1 \otimes u_2 + f_2 \otimes u_1 \quad (26)$$

$$f_{13} = d(u_1 u_3) = f_1 \otimes u_3 + f_3 \otimes u_1 \quad (27)$$

$$f_{23} = d(u_2 u_3) = f_2 \otimes u_3 + f_3 \otimes u_2 \quad (28)$$

$$\chi(i) = k \iff i\text{-я вершина раскрашена в цвет } k \quad (29)$$

Тогда для  $\text{Im } d_1$  получим:

$$\text{Im } d_1 = \mathbb{Z}_2 \langle f_1, f_2, f_3, f_{12}, f_{13}, f_{23} \rangle \quad (30)$$

Рассмотрим  $\text{Ker } d_1$ :

$$d_1 : \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^m \sigma_i^l v_i \otimes u_l \rightarrow \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma_i^l \lambda_{l,j} v_i v_j = \quad (31)$$

$$= \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}_P} \left( \sigma_i^{\chi(j)} + \sigma_j^{\chi(i)} \right) v_i v_j + \sum_{i=1}^m \sigma_i^{\chi(i)} v_i^2 = 0 \quad (32)$$

$$\begin{cases} \sigma_i^{\chi(i)} = 0, i = \overline{1, m} \\ \sigma_i^{\chi(j)} + \sigma_j^{\chi(i)} = 0, (i, j) \in \mathcal{K}_P \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{Если } (i, j) \in \mathcal{K}_P \Rightarrow \chi(j) \neq p, \text{ то } \sigma_i^p \text{—любое,} \quad (34)$$

Из уравнений (33) следуют цепочки равенств, каждая из которых соответствует одной из компонент связности  $\mathcal{K}_k^1, \dots, \mathcal{K}_k^{\alpha(k)}$  подкомплекса без вершин цвета  $k$ :

$$\sigma_i^{\chi(j)} = \sigma_j^{\chi(i)}, (i, j) \in \mathcal{K}_P \setminus \{i: \chi(i)=k\} \quad \chi(i), \chi(j) \neq k, k = \overline{1, 3} \quad (35)$$

Каждой такой компоненте связности  $\mathcal{K}_k^r \subset \mathcal{K}_P$  соответствует базисный коцикл  $c_k^r$ , получаемый подстановкой соответствующих  $\sigma_i^l = 1$ :

$$c_k^r = \sum_{i>j, (i,j) \in \mathcal{K}_k^r} (v_i \otimes u_{\chi(j)} + v_j \otimes u_{\chi(i)}), r = \overline{1, \alpha(k)} \quad (36)$$

$$\text{Ker } d_1 = \mathbb{Z}_2 \langle v_i \otimes c_k^r, v_i \otimes 1 \rangle, i = \overline{1, m}, r = \overline{1, \alpha(k)}, k = \overline{1, 3} \quad (37)$$

После факторизации по кограницам  $f_{\chi(i)\chi(j)} = \sum_{r=1}^{\alpha(k)} c_k^r$  и  $f_k = \sum_{\chi(j)=k} v_j$  получим:

$$H^1 = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \langle \tilde{v}_i : i \in \overline{4, m} \rangle}_{H^{0,1}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_2 \langle c_k^r : r \in \overline{1, \alpha(k) - 1}, k \in \overline{1, 3} \rangle}_{H^{1,1}} \quad (38)$$

$$\text{Im}d_2 = \mathbb{Z}_2 \langle v_i \otimes f_q, v_i \otimes f_{qr} \rangle \quad (39)$$

Теперь рассмотрим  $\text{Ker } d_3$

$$\begin{aligned} d_3 : \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{i=1}^m \sigma_i^l v_i^2 + \sum_{i>j}^m \Omega_{i,j}^l v_i v_j \right) \otimes u_l \rightarrow \\ \rightarrow \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{i=1}^m \sigma_i^l v_i^2 + \sum_{i>j}^m \Omega_{i,j}^l v_i v_j \right) \sum_{j=1}^m \lambda_{l,j} v_j = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{cases} \sigma_i^{\chi(i)} = 0 \\ \sigma_i^{\chi(j)} + \Omega_{i,j}^{\chi(i)} = 0 \\ \sigma_j^{\chi(i)} + \Omega_{i,j}^{\chi(j)} = 0, \quad (i, j) \in K_P, \quad i > j \end{cases} \quad (41)$$

Из уравнений (41) следуют цепочки равенств, соответствующие базисным коциклам  $g_i^k$  :

$$\begin{aligned} g_i^k &= v_i^2 \otimes u_k + v_i \sum_{\chi(j)=k} v_j \otimes u_{\chi(i)} = \\ &= v_i \left( \sum_{\chi(j)=\chi(i)} v_j \otimes u_k + \sum_{\chi(j)=k} v_j \otimes u_{\chi(i)} \right) = v_i \otimes f_{\chi(i)k} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\text{Ker } d_3 = \mathbb{Z}_2 \langle v_i^2 \otimes 1, v_i^2 \otimes u_l, v_i v_j \otimes 1 \quad (i, j) \in K_P, v_i \otimes f_{\chi(i)k}, d_{ij} \rangle \quad (43)$$

где  $d_{ij} = v_i v_j \otimes u_l (\chi(i) \neq l, \chi(j) \neq l, (i, j) \in K_P)$ . Коциклы вида  $v_i^2 \otimes u_l$  (у вершины  $i$  нет соседей цвета  $l$ ) и  $v_i v_j \otimes u_l$  (вершины  $i$  и  $j$  выкрашены в цвет, отличный от  $l$ ) соответствуют коэффициентам  $\sigma_i^l, \Omega_{i,j}^l$ , не вошедшим в уравнения (41), при этом:

$$v_i^2 \otimes u_l = v_i \otimes f_{\chi(i)l} \quad (44)$$

$$H^2 = \underbrace{(\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P])_2 / \sum_{j=1}^m \lambda_{i,j} v_j}_{H^{0,2}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_2 \langle d_{ij} | (i,j) \in \mathcal{K}_P \rangle / \sum_{j: F_i \cap F_j \neq \emptyset}^m d_{ij=0, i=\overline{1,m}}}_{H^{1,2}}$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_i^2 &= 0, \quad (c_k^r)^2 = 0 \\ \tilde{t}_i \tilde{t}_j &= [t_i t_j], \quad c_k^{r_1} c_k^{r_2} = 0 \end{aligned}$$

$$c_{k_1}^{r_1} c_{k_2}^{r_2} = c_{k_2}^{r_2} c_{k_1}^{r_1} = \sum_{(i,j) \in (\mathcal{K}_{k_1}^{r_1} \times \mathcal{K}_{k_2}^{r_2}) \cap \mathcal{K}_P} [d_{ij}]$$

$$\tilde{t}_i c_k^r = 0, \quad \text{если } \chi(i) \neq k$$

$$\tilde{t}_i c_{\chi(i)}^r = c_{\chi(i)}^r \tilde{t}_i = \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}_P, j \in \mathcal{K}_{\chi(i)}^r} [d_{ij}]$$

## Список литературы

- [1] Э. Б. Винберг, “Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности”, Тр. ММО, 47, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 68–102
- [2] A. Kolpakov, “On the optimality of the ideal right-angled 24-cell”, *Algebr. Geom. Topol.*, 12:4 (2012), 1941–1960.
- [3] Brinkmann G., Greenberg S., Greenhill C., McKay B.D., Thomas R., Wollan P. Generation of simple quadrangulations of the sphere // *Discrete Math.* 2005. V. 305, N 1–3. P. 33–54.
- [4] Веснин А.Ю. Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия // *УМН.* 2017. Т. 72, № 2. С. 147–190.
- [5] Н. Ю. Ероховец, Трехмерные прямоугольные многогранники конечного объема в пространстве Лобачевского: комбинаторика и конструкции, Труды МИАН, 2019, том 305, 86–147
- [6] William P. Thurston "The Geometry and Topology of Three-Manifolds <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/> .
- [7] L. Battista, V. Martelli "Hyperbolic 4-manifolds with perfect circle-valued Morse functions <https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.04997> .
- [8] V. Buchstaber, T. Panov "Toric Topology <http://hgeom.math.msu.su/surv.pdf>
- [9] M.W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, 62:2 (1991), 417–451.
- [10] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак "Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками" *УМН*, 72:2(434) (2017), 3–66

- [11] M. Franz "The cohomology rings of real toric spaces and smooth real toric varieties Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 152 (2022), 720-737.