



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

---

МЕХАНИКО—МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

кафедра высшей геометрии и топологии

**Поверхности, получаемые из отражений идеальных многоугольников на  
плоскости Лобачевского**

Курсовая работа  
студентки 3-го курса  
Чепакowej Д.В.

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор  
Панов Т. Е.

## Содержание

Введение	3
1. Предварительные сведения	3
2. Примеры построения $\mathcal{M}$	3
3. Характеристики $\mathcal{M}$ — ориентируемость, род, количество проколов	4
Список литературы	8

# Введение

В геометрической теории групп одной из наиболее интересных и важных задач является построение многообразий как фактор—пространств по действию групп (см. [1]). Широкий класс многообразий можно получить, рассматривая в качестве таких групп отражения относительно сторон многоугольника в некотором пространстве. На плоскости Лобачевского существуют многоугольники, рёбра которых пересекаются под нулевым углом — идеальные многоугольники (см. [2]). Группа, порождаемая отражениями относительно его сторон, изоморфна свободному произведению групп  $\mathbb{Z}_2$ .

Данная работа посвящена поверхностям, получаемым из отражений идеальных многоугольников, и их свойствам. В первом разделе приводятся начальные сведения и необходимые конструкции. Во втором разделе рассматриваются некоторые простые примеры построения поверхностей. Общие свойства поверхностей — ориентируемость, род, количество проколов — описаны в третьем разделе.

## 1. Предварительные сведения

Пусть  $P$  — идеальный  $m$ -угольник в двумерном пространстве Лобачевского  $\mathbb{L}_2$ , т.е. все его вершины лежат на абсолюте. Стороны  $P$  будем в дальнейшем обозначать как  $a_1, \dots, a_m$ .

**Конструкция 1.1.** Пусть  $R(P)$  — группа, порождённая отражениями  $g_i$  относительно сторон  $a_i$ . Нам будут интересовать гладкие многообразия (поверхности)  $\mathcal{M}$ , получаемые факторизацией  $\mathbb{L}_2$  по ядру сюръективного гомоморфизма  $\phi : R(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$ , где  $k = \overline{1, m}$ :

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_2 / \text{Ker}\phi \quad (1)$$

Род поверхности  $g$  и её эйлерова характеристика  $\chi$  связаны известным соотношением:

$$g = 1 - \frac{\chi}{2} \quad (2)$$

Проколы возникают в результате отражения вершин на абсолюте.

## 2. Примеры построения $\mathcal{M}$

Перед доказательством общих утверждений рассмотрим два простых примера конструирования многообразий из отражений многоугольников.

### Пример 2.1.

Пусть  $P$  — прямоугольный многоугольник;  $k = m$ , т.е.  $\phi$  является отображением абелизации. Для случая двумерных многообразий, которым посвящена эта работа, задача сводится к нахождению рода поверхности  $g$ . Фундаментальная область  $\text{Ker}\phi$  представляют из себя  $2^m$  прямоугольных многоугольников, получаемых из прямоугольного многоугольника последовательными отражениями относительно его сторон. Тогда факторпространство будет результатом склейки тех ребер фундаментальной области, которые переводятся друг в друга элементами группы. Так как углы многоугольников прямые, в каждой вершине сходятся по четыре многоугольника. Также, (из замкнутости) очевидно, что каждое ребро склеивается ровно с одним другим. Следовательно, можно легко вычислить эйлерову характеристику этого многообразия:

$$\chi = m \frac{2^m}{4} - m \frac{2^m}{2} + 2^m = (4 - m)2^{m-2} \quad (3)$$

Откуда, по формуле (2) сразу получаем род поверхности

$$g = 1 + (m - 4)2^{m-3} \quad (4)$$

Заметим, что ни одна из вершин многоугольника  $P$  не лежит на абсолюте, поэтому проколы при склейке его отражений не образуются.

**Пример 2.2.**

Теперь пусть  $P$ -идеальный треугольник ( $m = 3$ ), а  $k = 1$ . В этом случае отображение  $\phi : R(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  осуществляется единственным образом:

$$g_1 \mapsto e_1$$

$$g_2 \mapsto e_1$$

$$g_3 \mapsto e_1$$

Тогда  $M$  будет представлять собой два треугольника со склейкой сторон, обозначенных одной буквой.

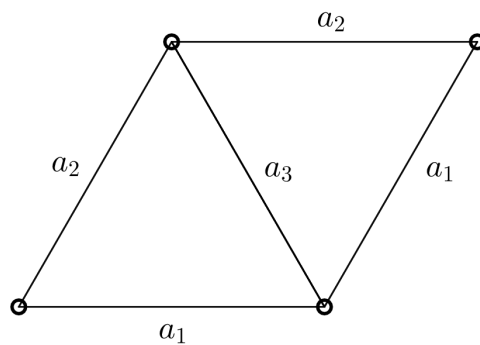


Рис. 1. Иллюстрация к примеру 2.2. Поверхность, получаемая в результате склейки рёбер, обозначенных одинаковыми буквами — сфера с тремя проколами.

Результатом склейки будет сфера ( $g = 0$ ) с тремя проколами ( $p = 3$ ).

### 3. Характеристики $\mathcal{M}$ — ориентируемость, род, количество проколов

Сперва исследуем ориентируемость интересующих нас многообразий в терминах отображения  $\phi$ , переводящего порождающие элементы группы  $R(P)$  в группу  $\mathbb{Z}_2^k$ . Рассмотрим фиксированную сторону  $a_k$  и соответствующую сторону многоугольника, являющегося результатом отражения относительно одной из других сторон, которую обозначим тоже  $a_k$  — см. Рис.2. Очевидно, что при склейке этих двух сторон никаких перекручиваний, и, следовательно, неориентируемостей не возникает.

Теперь рассмотрим сторону  $a_k$ , получающуюся в результате двух последовательных отражений — см. Рис.3. Если теперь мы склеим ее со стороной  $a_k$  многоугольника  $P$ , то возникнет перекручивание, и полученное таким образом многообразие будет неориентированным.

Итак, неориентируемость возникает, если ребро многоугольника  $G_1(P)$  фундаментальной области склеивается с ребром многоугольника  $G_2(P)$ , имеющим ту же ориентацию. Поскольку ориентация многоугольника меняется каждый раз при последовательных отражениях, то длины приведенных слов  $G_1$  и  $G_2$  будут иметь одинаковую четность.

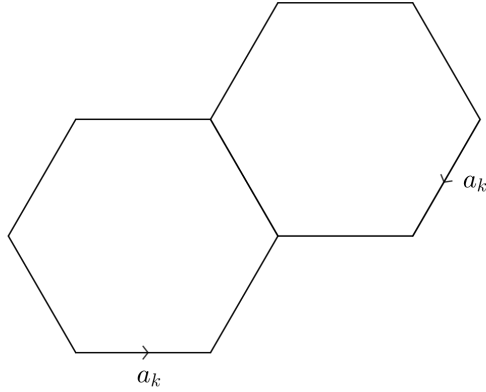


Рис. 2. Склейка сторон  $a_k$  не приводит к перекручиванию.

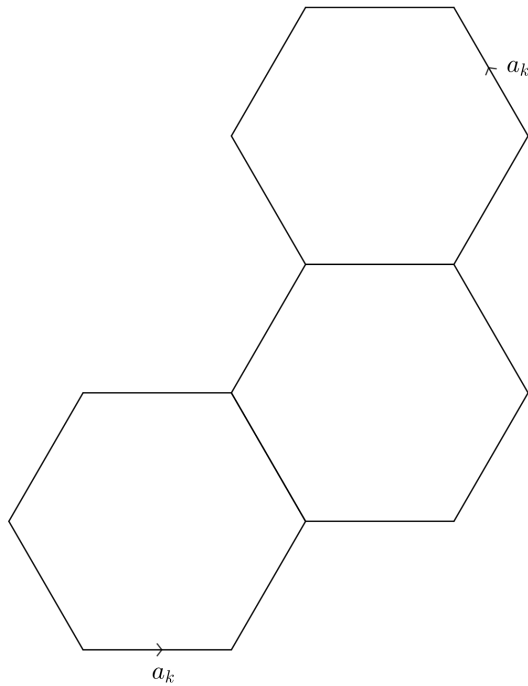


Рис. 3. Склейка сторон  $a_k$  приводит к перекручиванию

**Лемма 3.1.** *Многообразие  $M$ , определённое в соответствии с (1) —неориентируемое тогда и только тогда, когда  $\text{Кег}\phi$  содержит приведенные слова нечетной длины.*

*Доказательство.* • **Необходимость.** Пусть  $M$ — неориентируемое. Тогда факторизуются два ребра фундаментальной области  $g_{i_1} \dots g_{i_r}(a_k)$  и  $g_{j_1} \dots g_{j_s}(a_k)$ . Причем,  $r$  и  $s$  имеют одинаковую четность. И  $g_{i_1} \dots g_{i_r} \dots g_{j_s} \dots g_{j_1} \notin \text{Кег}\phi$ , иначе только один из многоугольников  $g_{i_1} \dots g_{i_r}(P)$  и  $g_{j_1} \dots g_{j_s}(P)$  входил бы в фундаментальную область. Следовательно,  $k \in \{i_1, \dots, i_r\} \cup \{j_1, \dots, j_s\}$ . Пусть  $k$  лежит в первом наборе. Тогда, слово  $g_{i_1} \dots \hat{g}_k \dots g_{i_r} g_{j_s} \dots g_{j_1}$  (нечетное)  $\in \text{Кег}\phi$ .

• **Достаточность.** Аналогично, если в  $\text{Кег}\phi$  есть слово нечетной длины  $g_{i_1} \dots g_{i_r} g_{j_s} \dots g_{j_1}$ , то ребро  $g_{i_1} \dots g_{i_r}(a_k)$  склеивается с  $g_{j_1} \dots g_{j_s}(a_k)$ , причем  $k \in \{i_1, \dots, i_r\} \cup \{j_1, \dots, j_s\}$ . Пусть  $k$  лежит в первом наборе. Тогда, так как  $g_{i_1} \dots g_{i_r}(a_k)$  эквивалентно  $g_{i_1} \dots \hat{g}_k \dots g_{i_r}(a_k)$ , получаем, что ребро  $g_{i_1} \dots \hat{g}_k \dots g_{i_r}(a_k)$  склеивается с ребром  $g_{j_1} \dots g_{j_s}(a_k)$ . Изначально слово  $g_{i_1} \dots g_{i_r} g_{j_s} \dots g_{j_1}$

было нечетным, поэтому слова, которые действуют на  $a_k$  имеют длину одинаковой четности. Следовательно,  $\mathcal{M}$  неориентируемо.  $\square$

Примером ориентируемого  $\mathcal{M}$  является полученная выше сфера. Приведем пример неориентируемого многообразия, получаемого описанным выше способом.

**Пример 3.2.**

Пусть  $P$ —треугольник,  $k = 2$ , а  $\phi$  задается следующими отображениями:

$$\begin{aligned} g_1 &\mapsto e_1 \\ g_2 &\mapsto e_2 \\ g_3 &\mapsto e_1 + e_2 \end{aligned}$$

Фундаментальная область показана на Рис.4. В результате склейки получается вещественная проективная плоскость  $\mathbb{R}P^2$  с тремя проколами.

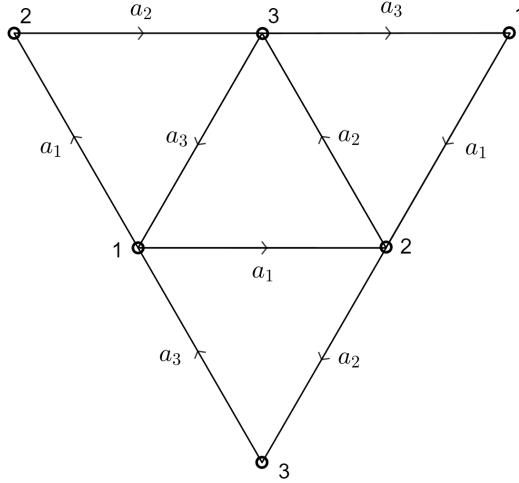


Рис. 4. Иллюстрация к примеру 3.2. В данном случае результатом склейки сторон, обозначенных одной буквой будет вещественная проективная плоскость с тремя проколами.

**Лемма 3.3.** Пусть многообразие  $\mathcal{M}$  определено в соответствии с (1) и дополнительно  $k = m$ . Тогда для рода  $g(\mathcal{M})$  и количества проколов  $p(\mathcal{M})$  верны следующие соотношения:

$$g = 1 + 2^{m-3}(m - 4) \tag{5}$$

$$p = m2^{m-2} \tag{6}$$

*Доказательство.* Поскольку  $\phi$ —отображение абелизации, то  $\text{Кер}\phi$  — это коммутант группы  $R(P) - [R(P), R(P)]$ .  $\mathbb{L}_2/\text{Кер}\phi$  представляет собой  $2^m$  копий многоугольника  $P$ , склеивающихся по четыре в каждой вершине. Количество вершин ( $m2^{m-2}$ ) при этом совпадает с числом проколов, откуда получаем соотношение (6). Подсчет эйлеровой характеристики этого многообразия дает:

$$\chi = m \frac{2^m}{4} - m \frac{2^m}{2} + 2^m = (4 - m)2^{m-2} \tag{7}$$

Используя формулу (2), получаем формулу (5).  $\square$

Теперь перейдем к доказательству общего утверждения

**Теорема 3.4.** Пусть  $P$ —идеальный  $m$ —угольник со сторонами  $a_1, \dots, a_m$  на плоскости Лобачевского  $\mathbb{L}_2$ ;  $R(P)$  — группа, порождаемая отражениям  $g_i$  относительно сторон  $a_i$ ;  $\phi : R(P) \rightarrow \mathbb{Z}_2^k$  — сюръективный гомоморфизм; многообразие  $\mathcal{M}$  определено в соответствии с (1). Тогда для рода  $g(\mathcal{M})$  и количества проколов  $p(\mathcal{M})$  верны следующие соотношения:

$$g = 1 + 2^{k-3} (l - 4) \quad (8)$$

$$p = 2^{k-2} (2m - l) \quad (9)$$

где  $m - l$  — число соседних элементов  $g_i, g_{i+1}$ , отображаемых  $\phi$  в один элемент  $\mathbb{Z}_2^k$ .

*Доказательство.*  $\mathbb{L}_2 / \text{Ker} \phi$  можно разветвленно накрыть  $\mathbb{L}_2 / [R(P), R(P)]$  с количеством листов накрытия равным  $2^{m-k}$ . Причем точки ветвления будут в вершинах пересечения ребер  $a_i, a_{i+1}$ , если  $g_i g_{i+1} \in \text{Ker} \phi$ , а степень отображения в этих точках будет в два раза меньше.

Например (см. Рис.5), если в ядре есть слово  $g_2 g_3$ , то точка  $B$  накрывается разветвленно, с индексом накрытия в два раза меньше, чем  $2^{m-k}$ . Поскольку точка  $A$  является пересечением ребер, порождающих эти элементы.

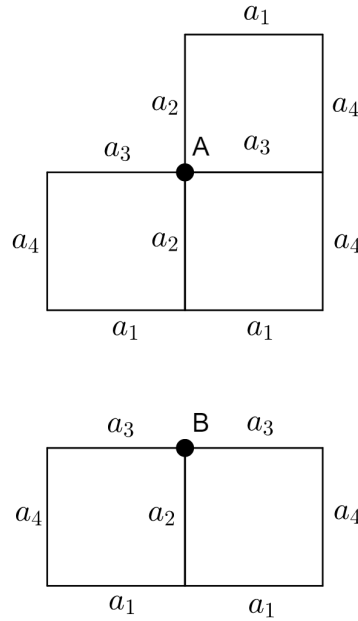


Рис. 5. К доказательству теоремы 3.4. Точка  $A$  разветвлённо накрывает точку  $B$ .

Пусть  $m - l$  — общее количество пар таких пересекающихся и одинаково отображающихся ребер. Тогда можно посчитать количество проколов (вершин) накрываемого пространства:

$$p = (m - l) \frac{2^{m-2}}{2^{m-k-1}} + l \frac{2^{m-2}}{2^{m-k}} = 2^{k-2} (2m - l) \quad (10)$$

а эйлерова характеристика соответственно равна

$$\chi = p - m 2^{k-1} + 2^k, \quad (11)$$

тем самым получаем выражение для рода

$$g = 1 + 2^{k-3} (l - 4) \quad (12)$$

□

### Оценка для 1:

- 1) Пусть  $k = 1$ . Тогда имеется ровно одна возможность для отображения  $\phi$  — все элементы  $R(P)$  переводятся в один базисный элемент в  $e_1 \in \mathbb{Z}_2$ . тогда  $m - l = m$  откуда  $l = 0$
- 2) Пусть  $k = 2$ . Тогда образами  $g_1, \dots, g_k$  отображения  $\phi$ , в случае ориентированных многообразий  $\mathbb{L}_2 / \text{Ker} \phi$ , являются базисные элементы в  $\mathbb{Z}_2^2 - e_1$  и  $e_2$ . Следовательно,  $l$  в этом случае — это количество соседних элементов  $g_i, g_{i+1}$ , переводимых в различные элементы  $\mathbb{Z}_2^2$ . Очевидно, что оно четно.
- 3) Пусть  $k \geq 3$ . Очевидно, что  $l \leq m$ . Из сюръективности  $\phi$  следует, что  $l \geq k$

Неориентируемые многообразия  $\mathcal{M}'$  можно получить, двулистно накрывая их ориентируемыми. Тогда,

$$\chi(\mathcal{M}') = \frac{\chi(\mathcal{M})}{2} = 2^{k-3}(4-l) = 2 - g' \quad (13)$$

$$p' = \frac{p}{2} = 2^{k-3}(2m-l) \quad (14)$$

где  $g', p'$  — соответственно неориентируемый род и количество проколов многообразия  $\mathcal{M}'$ .

## Список литературы

- [1] Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман. *Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны*. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, 1988, том 29, 147–259
- [2] В. В. Прасолов. *Геометрия Лобачевского*. Издательство МЦНМО, 2004.