Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Двойные когомологии момент-угол комплексов на графах

Выполнил студент 503 группы
Балабанов Пётр Григорьевич.
Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич.

Москва, 2025

1. Введение

Двойные когомологии - это относительно новый алгебраический инвариант, который впервые был изучен в статьях [4], [1]. Конструкция двойных когомологий $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ вводится для класса пространств $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, построение использует описание $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, но получающаяся при этом алгебра $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ значительно отличается от $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, . В данной работе предпринята попытка ограничить ранг $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ для пространств $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, ассоциированных с графами, а также сделаны вычисления $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ для некоторых семейств графов.

На момент выхода статьи [4] было неизвестно, насколько произвольный ранг может иметь алгебра $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, но позже в [3] был построен пример $\mathcal{K}$, для которого $\operatorname{rank} HH^*(ZK) = 6$, и в [7] – семейство $\{\mathcal{K}_{2r} : r \geq 1\}$ такое, что $\operatorname{rank} HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{2r}}) = 2r$. Также был дан ответ на вопрос (8.2, [4]) в работе [5], а именно, был построен неразложимый в букет трёхмерный симплициальный комплекс с двойными когомологиями, равными $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ в градуировках $(0, 0)$ и $(-1, 4)$.

В главе 3 доказывается, что если $\mathcal{K}$ – граф, отличный от границы многоугольника, то старшие двойные когомологии соответствующего момент-угол комплекса равны нулю.

В главе 4 приводятся вычисления для некоторых семейств графов вида "полный граф без какого-то числа рёбер".

2. Предварительные сведения

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ – это такой набор подмножеств $[m]$, что из $I \in \mathcal{K}$ следует $J \in \mathcal{K}\ \forall J \subset I$. Предполагаем, что $\varnothing \in \mathcal{K}$, и что $\mathcal{K}$ содержит все одноэлементные подмножества $\{i\} \in [m]$.

Пусть $\operatorname{CAT}(\mathcal{K})$ – категория граней $\mathcal{K}$, в которой объектами являются грани $I \in \mathcal{K}$, а морфизмы – вложения $J \subset I$. Для каждого подмножества $I \in \mathcal{K}$ рассмотрим топологическое пространство следующего вида

$$(D^2, S^1)^I \coloneqq \{(z_1, \ldots, z_m) \in (D^2)^m \colon |z_j| = 1 \text{ if } j \notin I\} \subset (D^2)^m.$$

Заметим, что для каждой пары граней $I \subset J$ пространство $(D^2, S^1)^I$ является подпространством в $(D^2, S^1)^J$. Поэтому, имеем диаграмму

$$\mathscr{D}_\mathcal{K} \colon \operatorname{CAT}(\mathcal{K}) \to \operatorname{TOP}$$

которая переводит $I \in \mathcal{K}$ в $(D^2, S^1)^I$. *Момент-угол комплекс*, соответствующий $\mathcal{K}$, определяется как

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \coloneqq \operatorname{colim} \mathscr{D}_K = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I \subseteq (D^2)^m.$$

Теорема 2.1 ([6]). *Выполнены следующие изоморфизмы биградуированных коммутативных алгебр*

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) &\cong \operatorname{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}\big) \\ &\cong H\big(\Lambda[u_1, \ldots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d\big) \qquad (1) \\ &\cong \bigoplus_{I \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I). \qquad (2) \end{aligned}$$

В 1 записано обозначение для когомологий дифференциальной биградуированной алгебры с бистепенью образующих $\operatorname{bideg} u_i = (-1, 2)$, $\operatorname{bideg} v_i = (0, 2)$ *и дифференциалом бистепени* $(1, 0)$, *который задан на образующих как* $du_i = v_i$, $dv_i = 0$. *В 2* $\widetilde{H}^*(\mathcal{K}_I)$ *обозначает приведённые симплициальные когомологии полного подкомплекса* $\mathcal{K}_J \subset \mathcal{K}$, *т.е. ограчения* $\mathcal{K}$ *на* $I \subset [m]$. *Последний изоморфизм является суммой изоморфизмов*

$$H^p(\mathcal{K}) \cong \sum_{I \subset [m]} \widetilde{H}^{p-|I|-1}(\mathcal{K}_I),$$

где структура кольца задана отображениями

$$H^{p-|I|-1}(\mathcal{K}_I) \otimes H^{q-|J|-1}(\mathcal{K}_J) \to H^{p+q-|I|-|J|-1}(\mathcal{K}_{I\cup J})$$

которые индуцированы каноническими симплициальными отображениями $\mathcal{K}_{I\cup J} \to \mathcal{K}_I * \mathcal{K}_J$ *для* $I \cap J = \varnothing$ *и* 0 *иначе.*

Изоморфизм в 2 называется разложением Хохстера. Отдельные градуировочные компоненты когомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ выражаются соотношениями

$$H^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{I\subset[m]\colon\, |I|=\ell} \widetilde{H}^{\ell-k-1}(\mathcal{K}_I), \quad H^p(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \bigoplus_{-k+2\ell=p} H^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

2.1. **Двойные когомологии и гомологии.** Для $i \in I$ рассмотрим гомоморфизм

$$\psi_{p;i,I}\colon \widetilde{H}^p(\mathcal{K}_I) \to \widetilde{H}^p(\mathcal{K}_{I\setminus\{i\}}) \tag{3}$$

индуцированный вложением $\mathcal{K}_I \hookrightarrow \mathcal{K}_{I\cup\{j\}}$, и рассмотрим дифференциал

$$d'_p = (-1)^{p+1} \sum_{i\in I} \varepsilon(i,I)\psi_{p;i,I}. \tag{4}$$

Далее мы определим отображение $d'\colon H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ через d'_p, используя разложение в 2 вместе с 3, 4; это отображение действует на биградуированных компонентах когомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ следующим образом:

$$d'\colon H^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^{-k+1,2\ell-2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}). \tag{5}$$

В [4] доказывается, что $(d')^2 = 0$, поэтому d' превращает $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ в коцепной комплекс

$$CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \coloneqq (H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), d'). \tag{6}$$

Мы определяем *двойные когомологии* $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ как

$$HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H\big(H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), d'\big).$$

Аналогично когомологическому разложению в 2 выполнено разложение для гомологий

$$H_p(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{I\subset[m]} \widetilde{H}_{p-|I|-1}(\mathcal{K}_I).$$

Пусть есть вершина $j \in [m] \setminus I$, рассмотрим гомоморфизм

$$\phi_{p;I,j}\colon \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_I) \to \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_{I\cup\{j\}})$$

индуцированный вложением. $\mathcal{K}_I \hookrightarrow \mathcal{K}_{I\cup\{j\}}$. Затем, для фиксированного $I \subset [m]$ определим

$$\partial'_p = (-1)^{p+1} \sum_{j\in[m]\setminus I} \varepsilon(j,I)\, \phi_{p;I,j}\colon \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_I) \to \bigoplus_{j\in[m]\setminus I} \widetilde{H}_p(\mathcal{K}_{I\cup\{j\}}),$$

где

$$\varepsilon(j,I) = (-1)^{\#\{i\in I\colon\, i<j\}}.$$

Знак $(-1)^{p+1}$ выбран таким образом, чтобы ∂' вместе с симплициальным дифференциалом ∂ удовлетворяли соотношению для бикомплекса $\partial\partial' = -\partial'\partial$.

Гомоморфизм ∂'_p удовлетворяет соотношению $(\partial'_p)^2 = 0$, поэтому у нас есть цепной комплекс

$$CH_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \coloneqq (H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), \partial'),$$

где

$$\partial' : \widetilde{H}_{-k,2\ell}(\mathcal{Z_K}) \to \widetilde{H}_{-k-1,2\ell+2}(\mathcal{Z_K})$$

в соответствии со следующим разбиением $H_p(\mathcal{Z_K})$ в прямую сумму биградуированных компонент

$$H_p(\mathcal{Z_K}) = \bigoplus_{-k+2\ell=p} H_{-k,2\ell}(\mathcal{Z_K}), \quad H_{-k,2\ell}(\mathcal{Z_K}) \cong \bigoplus_{I\subset[m]:\,|I|=\ell} \widetilde{H}_{\ell-k-1}(\mathcal{K}_I).$$

Мы определяем биградуированные *двойные гомологии* of $\mathcal{Z_K}$ как

$$HH_*(\mathcal{Z_K}) = H(H_*(\mathcal{Z_K}), \partial').$$

Введём на алгебре Кошуля $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathcal{Z}[\mathcal{K}]$ второй дифференциал d' степени $(-1, 2)$, положив

$$d'u_j = 1, \quad d'v_j = 0, \qquad j = 1, \dots, m, \tag{7}$$

продолжая на произведения по правилу Лейбница. А именно, d' определён на бесквадратных мономах $u_J v_I$ как

$$d'(u_J v_I) = \sum_{j\in J} \varepsilon(j, J) u_{J\setminus\{j\}} v_I, \quad d'(v_I) = 0.$$

Нам пригодится следующая теорема, доказанная в [4]

Теорема 2.2. *Дифференциалы d и d' удовлетворяют соотношению $dd' = -d'd$. $HH^*(\mathcal{Z_K})$ изоморфны первым двойным когомологиям бикомплекса Кошуля $\big(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathcal{Z}[\mathcal{K}], d, d'\big)$:*

$$HH^*(\mathcal{Z_K}) \cong H\big(H\big(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathcal{Z}[\mathcal{K}], d\big), d'\big).$$

Для мономов алгебры Кошуля будем использовать сокращённое обозначение $u_{i_1} \dots u_{i_q} v_{j_1} \dots v_{j_k} = u_{i_1\dots i_q} v_{j_1\dots i_k}$. Двойными скобками $[[u_J v_L]]$ будем обозначать класс двойных когомологий, представителем которого является класс обычных когомологий $[u_J v_L] \in H^*(\mathcal{Z_K})$.

3. Ограничение на ранг старшей компоненты

Утверждение 3.1. *Пусть $\mathcal{K}$ – одномерный симплициальный комплекс на $[m]$, $\mathcal{Z_K}$ – ассоциированный с ним момент-угол комплекс. Старшие двойные когомологии $\mathcal{Z_K}$ принимают одно из двух значений:*

(а) $HH^{-m+2,2m}(\mathcal{Z_K}) = \mathbb{Z}$, и тогда $\mathcal{K}$ – это m-цикл;

(б) $HH^{-m+2,2m}(\mathcal{Z_K}) = 0$ во всех остальных случаях;

Рассмотрим участок цепного комплекса, из которого получается группа $HH_{-m+2,2m}(\mathcal{Z_K})$:

$$\cdots \longrightarrow CH_{-m+1,2m-2}\left(\mathcal{Z_K}\right) \xrightarrow{\partial'} CH_{-m+2,2m}\left(\mathcal{Z_K}\right) \longrightarrow 0\,,$$

применив разложение Хохстера, перепишем цепь в виде:

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{i=1,\dots,m} H_1\left(\mathcal{K}_{[m]\setminus\{i\}}\right) \xrightarrow{\bigoplus(-1)^{\varepsilon}\phi_i} H_1\left(\mathcal{K}\right) \longrightarrow 0\,, \tag{8}$$

где знак ε определяется в [4].

Из 8 можем видеть, что нетривиальные классы в старших двойных когомологиях представлены циклами, которые содержат все вершины. Если цикл не фундаментальный, т.е. содержит хорду, то он распадается в сумму фундаментальных циклов. Если содержит все вершины и является фундаментальным, то $\mathcal{K}$ – многоугольник. Утверждение доказано.

4. Вычисления для графов, близких к полным

Утверждение 4.1. *Пусть* $\mathbf{k}$ *– поле, и* $\psi : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ *– сюръективное симплициальное отображение между симплициальными комплексами* $\mathcal{L}$ *и* $\mathcal{K}$ *на множествах* $[l]$ *и* $[m]$ *соответственно. Определим отображение* $\psi^* : \Lambda[u_1, \dots, u_m] \to \Lambda[u_1, \dots, u_l]$ *равенством*

$$\psi^*(u_j) = \frac{1}{|\psi^{-1}(j)|} \sum_{i \in \psi^{-1}(j)} u_i.$$

В таком случае ψ^* *индуцирует гомоморфизм алгебр Кошуля с коэффициентами в* $\mathbf{k}$, *такой, что выполнено* $\psi^* d = d\psi^*$, $\psi^* d' = d'\psi^*$ *и имеют место гомоморфизмы*

- *(а)* $\big(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}], d, d'\big) \to \big(\Lambda[u_1, \dots, u_\ell] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{L}], d, d'\big)$,
- *(б)* $CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k}) \to CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{L}; \mathbf{k})$,
- *(в)* $HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k}) \to HH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{L}; \mathbf{k})$.

Доказательство. Продолжение ψ^* на $\mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$ определяется однозначно по свойству $\psi^* d = d\psi^*$. Пусть $\psi^{-1}(j) = \{i_1, \dots, i_s\}$. Имеем

$$\psi^* v_j = \psi^* du_j = d(\psi^* u_j) = \frac{1}{s} d(u_{i_1} + \dots u_{i_s}) = \frac{1}{s}(v_{i_1} + \dots v_{i_s}).$$

При этом также получаем отображение $\mathbf{k}[\mathcal{K}] \to \mathbf{k}[\mathcal{L}]$, поскольку выполнено свойство $\psi^*(\mathcal{I}_\mathcal{K}) \subset \mathcal{I}_\mathcal{L}$, проверка которого полностью аналогична доказательству (3.1.5,[6]). Убедимся, что ψ^* коммутирует с d'. $d'v_j = 0$, поэтому $\psi^* d' v_j = d'\psi^* v_j = 0$.

$$d'\psi^* u_j = d'\frac{1}{s}\big(u_{i_1} + \dots u_{i_s}\big) = \frac{1}{s} d'\big(u_{i_1} + \dots u_{i_s}\big) = \frac{1}{s}\big(\sum_{k=1}^{s} 1\big) = \frac{1}{s} s = 1 = \psi^*(1) = \psi^* d' u_j.$$

□

Определим операцию над графами, которую будем использовать для построения новых графов из более маленьких.

Определение 4.1 (Отражение вершины)**.** Пусть $\mathcal{K}$ – граф на $[m]$. Будем говорить, что граф $\mathcal{L}$ на $[m+1] = [m] \sqcup \{k'\}$ получен из $\mathcal{K}$ отражением в $\{k\} \in \mathcal{K}$, если $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}_{[m+1] \setminus k} \hookrightarrow \mathcal{L}$ – вложение полного подкомплекса, и новая вершина $\{k'\}$ соединена ребром с $\{k\}$ и со всеми вершинами, соседними с $\{k\}$. При этом выполнено $\mathcal{L}_{[m+1] \setminus k} \cong \mathcal{L}_{[m+1] \setminus k'}$.

Пример 4.1. *Один из восьми "графов-препятствий"([2]) может быть получен отражением вершины пятиугольника(см. Рис. 1).*

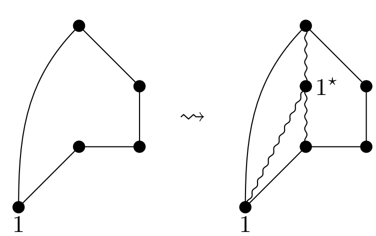

Рис. 1: Граф-препятствие(справа), содержащий нетривиальное тройное произведение Масси

В [2] доказывается, что когомологии соответствующего момент-угол комплекса содержат нетривиальное произведение Масси с нулевой неопределённостью.

Введённая нами операция похожа на ([1], 4.14), но она не повышает размерность $\mathcal{K}$.

Утверждение 4.2. *Пусть $\mathcal{L}$ получен из $\mathcal{K}$ дублированием вершины, и количество вершин в $\mathcal{K}$ больше либо равно 3. Тогда*

$$HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}};\mathbf{k}) \cong HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$$

Поскольку $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ и $HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ – алгебры без кручения, изоморфизм выше влечёт

$$HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) \cong HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}$ - симплициальный комплекс на $[m]$, $m \geq 3$. $\mathcal{L}$ – комплекс на $[m+1]$, полученный из $\mathcal{K}$ отражением вершины m, $\{m+1\} = \{m'\}$.

Зададим симплициальное отображение $\psi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$, по правилу $\psi(\{j\}) = \{j\}$ для $1 \leq j \leq m$, и $\psi(\{m+1\}) = \{m\}$, это отображение, приклеивающее отражённую вершину обратно, и тождественное на остальном симплексе. По утверждению 4.1, ψ индуцирует гомоморфизм алгебр Кошуля

$$\psi^* \colon H\big(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathcal{Z}[\mathcal{K}],d,d'\big) \longrightarrow H\big(\Lambda[u_1,\dots,u_m,u_{m+1}]\otimes\mathcal{Z}[\mathcal{L}],d,d'\big)\ ,$$

который коммутирует с дифференциалами, и поэтому является отображением цепных комплексов $CH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}},d') \to CH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}},d')$, у этого отображения мы знаем значение на обращующих:

$$\psi^*(v_1) = v_1,\ \dots\ ,\psi^*(v_{m-1}) = v_{m-1},\ \psi^*(v_m) = \frac{1}{2}(v_m + v_{m+1})\,,$$

$$\psi^*(u_1) = u_1,\ \dots\ ,\psi^*(u_{m-1}) = u_{m-1},\ \psi^*(u_m) = \frac{1}{2}(u_m + u_{m+1})\,.$$

Покажем, что $\psi^* : CH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}},d') \to CH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}},d')$ – квазиизоморфизм.

$\ker\psi^* = 0$. Действительно, ограничение ψ^* на слова, не содержащие в себе буквы с индексом m, – это тождественное отображение. Далее, если $[u_m v_j] \in \bigoplus_{J\subset\mathcal{K}} \widetilde{H}^0(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J})$ – ненулевой класс, то $\{m,j\}\notin\mathcal{K}$, и значит $\{m,j\}\notin\mathcal{L}$, $\{m',j\}\notin\mathcal{L}$ и $\psi^*([u_m v_j]) = \frac{1}{2}([u_m v_j] + [u_{m'} v_j]) \neq 0$. Равенство ядра нулю на одномерных коциклах проверяется аналогично.

Теперь докажем, что любой ненулевой класс гомологий комплекса $CH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}},d')$ содержится в образе ψ^*. Для мономов длины 2 имеем

$$\begin{aligned}\psi^*([u_m v_j]) &= \frac{1}{2}([u_{m'}v_j] + [u_m v_j])\\ &= \frac{1}{2}([u_{m'}v_j] - [u_m v_j] + 2[u_m v_j]) = \frac{1}{2}(\operatorname{im} d' + 2[u_m v_j]) = [u_m v_j] + \operatorname{im} d',\end{aligned} \tag{9}$$

поскольку $d'([u_{m'm}v_j]) = [u_{m'}v_j] - [u_m v_j]$. Поэтому $[u_m v_j] + \operatorname{im} d' = [u_{m'}v_j] + \operatorname{im} d' = \psi^*([u_m v_j])$.

Осталось доказать, что классы двойных когомологий, получающиеся из одномерных коциклов, содержатся в образе отображения ψ^*. Из утверждения 3.1 следует, что достаточно проверить это свойство для коциклов $[\alpha] \in \widetilde{H}^1(K_I)$, где $\mathcal{K}_I \subset \mathcal{K}$ – бесхордовый цикл, проходящий через вершину $\{m\}$. Пусть $J = \{j_1,\dots,j_p\}$ и $J \sqcup \{m\}$ – бесхордовый цикл и $\operatorname{link}_J\{m\} = \{j_1,j_p\}$. Тогда $\mathcal{K}_{J\sqcup\{m'\}} \cong \mathcal{K}_{J\sqcup\{m\}}$ и $\operatorname{link}_J\{m'\} = \operatorname{link}_J\{m\}$. Пусть $[\alpha] \in \widetilde{H}^1(\mathcal{K}_{J\sqcup\{m\}})$, где $[\alpha] = [u_{J\setminus j_1} v_{mj_1}]$. Имеем $\psi^*([u_{J\setminus j_1}v_{mj_1}]) = \frac{1}{2}([u_{J\setminus j_1}v_{mj_1}] + [u_{J\setminus j_1}v_{m'j_1}])$, а так же $d'([u_{mm'j_3\dots j_p}v_{j_1j_2}]) = [u_{m'j_3\dots j_p}v_{j_1j_2}] - [u_{mj_3\dots j_p}v_{j_1j_2}] = [u_{J\setminus j_1}v_{m'j_1}] - [u_{J\setminus j_1}v_{mj_1}]$, поскольку при удалении любой из вершин $j_3,\dots,j_p$ в полученном подкомплексе будут оставаться только циклы $\{m,m',j_1\}$ и $\{m,m',j_p\}$, и ребро j_1,j_2 не является внутренним ни для одного из них, так что все остальные слагаемые в $d'([u_{mm'j_3\dots j_p}v_{j_1j_2}])$ будут равны нулю. Делая преобразования, аналогичные 9, заключаем что $[u_{J\setminus j_1}v_{mj_1}] + \operatorname{im} d' = [u_{J\setminus j_1}v_{m'j_1}] + \operatorname{im} d' = \psi^*([u_{J\setminus j_1}v_{mj_1}])$.

□

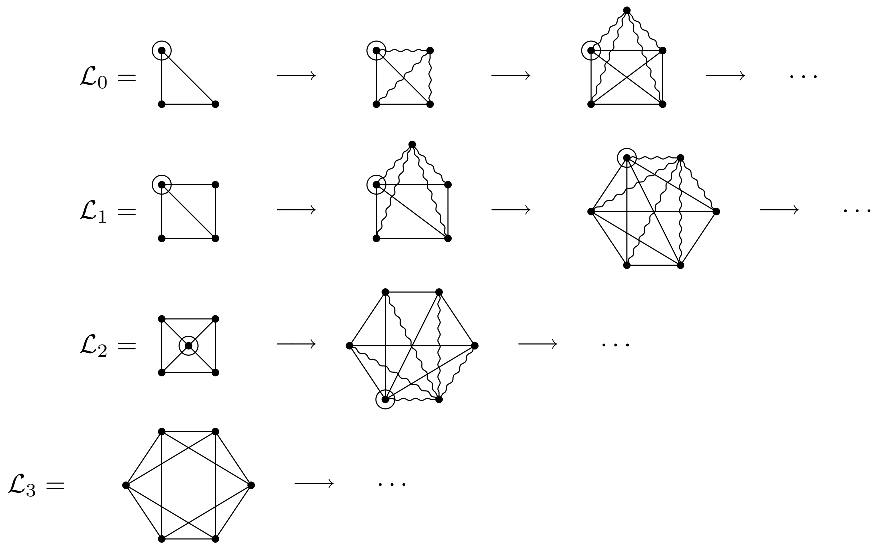

Рис. 2: Получение новых графов отражением обведённых вершин

Посмотрим на рис.2. В каждой строчке двойные когомологии соответствующих $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ одинаковы. Пусть $\mathcal{K}^0$ – полный граф на $[m]$. Тогда он расположен в первой строке, т.е. получается из треугольника $\mathcal{L}_0$ многократным отражением вершины, и

$$HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^0}) \cong HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_0}) \cong \mathbb{Z}^{(0,0)} \oplus \mathbb{Z}^{(-1,6)}.$$

Пусть $\mathcal{K}^1$ – полный граф на $[m]$, из которого удалили одно ребро, тогда

$$HH^*(\mathcal{Z}_{K^1}) \cong HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_1}) \cong \mathbb{Z}^{(0,0)} \oplus \mathbb{Z}^{(-1,4)}.$$

Пусть $\mathcal{K}^2$ – граф на m, $m \geq 5$, такой, что $\mathcal{K}^2$ получается удалением из полного графа двух рёбер без общей вершины. Тогда

$$HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^2}) \cong HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_2}) \cong \mathbb{Z}^{(0,0)} \oplus (\mathbb{Z}^2)^{(-1,4)} \oplus \mathbb{Z}^{(-2,8)}.$$

Возьмём полный граф на $m \geq 6$ вершинах и удалим из него три попарно несмежных ребра, получим $\mathcal{K}^3 \cong \mathrm{sk}_1(S^0 * S^0 * S^0)$, двойные когомологии $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^3}$ будут равны

$$HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^3}) \cong HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_3}) \cong \mathbb{Z}^{(0,0)} \oplus (\mathbb{Z}^3)^{(-1,4)} \oplus (\mathbb{Z}^2)^{(-2,8)}.$$

Пара несмежных рёбер в теории графов называется *паросочетанием.* Удаление паросочетания из полного графа равносильно удалению двух диагоналей в выбранном 4-угольнике, соответствующий ему пустой цикл является образующей в $\mathbb{Z}^{(-2,8)}$ для двойных когомологий $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^2}$. Когда мы удаляем третье ребро, появляется новое удалённое паросочетание, дающее вторую образующую в $(\mathbb{Z}^2)^{(-2,8)}$ для $HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^3})$. Но вообще говоря, в $\mathcal{K}^3$ есть три 4-цикла – по одному на каждую пару удалённых рёбер. Однако, в силу того, что два 4-цикла построены на общей диагонали, в двойных когомологиях между ними есть линейное соотношение, суть которого в следующем: два квадратика с одной общей диагональю можно сложить, результат сложения – квадратик, построенный на различных диагоналях слагаемых. Чтобы записать линейное соотношение на классы двойных когомологий, описывающее эту операцию, нужно сложить образы всех 24 образующих в одномерных когомологиях пятивершинных подкомплексов под действием морфизма $H^{(-3,10)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^3}) \xrightarrow{d'} H^{(-2,8)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^3})$. В $\mathcal{K}^3$ всего есть 6 полных пятивершинных подграфов, изоморфных $\mathcal{L}_2$, в каждом из которых 4 независимых цикла. Теперь возьмём полный граф на множестве

$[2n] = \{1, 1', 2, 2', \dots, n, n'\}$ и удалим из него рёбра $\{1, 1'\}, \{2, 2'\}, \dots, \{n, n'\}$; назовём получившийся граф $\mathcal{K}^n$. В $\mathcal{K}^n$ есть n дизъюнктных двоеточий и $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ пустых квадратиков. Будем вкладывать $\mathcal{K}^3$ в $\mathcal{K}^n$ следующим образом:

$$\mathcal{K}^3 \cong \mathcal{K}^n_{\{1,1',2,2',3,3'\}} \cong \mathcal{K}^n_{\{2,2',3,3',4,4'\}} \cong \dots \cong \mathcal{K}^n_{\{n-2,(n-2)',n-1,(n-1)',n,n'\}} \hookrightarrow \mathcal{K}^n \,,$$

и воспользуемся утверждением (4.8, [4]) о функториальности двойных когомологий относительно вложений полных подкомплексов. Эти вложения дадут линейные соотношения в $HH^{(-2,8)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n})$ вида

$$[[u_{12'}v_{1'2}]] + [[u_{23'}v_{2'3}]] = [[u_{13'}v_{1'3}]], \quad [[u_{23'}v_{2'3}]] + [[u_{34'}v_{3'4}]] = [[u_{24'}v_{2'4}]], \quad \dots \quad .$$

В результате получим, что $HH^{(-2,8)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n})$ образует линейное пространство размерности $n-1$ с базисом $[[u_{12'}v_{1'2}]], [[u_{23'}v_{2'3}]], \dots [[u_{(n-1),n'}v_{(n-1)',n}]]$. Нами доказана следующая

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{K}_n \cong \mathrm{sk}_1((S^0)^{*n})$ – граф, полученный из полного графа на $2n$ вершинах удалением n попарно несмежных рёбер. Тогда*

$$HH^{-k,2\ell}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{для } (-k, 2\ell) = (0,0) \ ; \\ \mathbb{Z}^n & \text{для } (-k, 2\ell) = (-1,4) \ ; \\ \mathbb{Z}^{(n-1)} & \text{для } (-k, 2\ell) = (-2,8); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В равенстве $\mathrm{rank}\, HH^{(-1,4)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n}) = n$ можно убедиться также из следующих рассуждений. Группа $H^{(-1,4)} = \mathbb{Z}^n$ порождена дизъюнктными двоеточиями на месте удалённых рёбер. Любой подкомплекс на 3 вершинах в $\mathcal{K}_n$ является связным, поэтому $H^{(-2,6)} = 0$ и цепь

$$\dots \to H^{(-2,6)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n}) \to H^{(-1,4)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n}) \to 0$$

принимает вид

$$\dots \to 0 \to \mathbb{Z}^n \to 0.$$

С другой стороны, ранг $HH^{(-1,4)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ равен количеству компонент связности в дополнительном графе. Обозначим за $\check{\mathcal{K}}$ граф, дополнительный к $\mathcal{K}$.

Пусть $\mathcal{K}$ – граф на $[4]$ с $\check{\mathcal{K}} = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$, тогда $HH^{(-1,4)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}\langle[u_1v_2],[u_3v_4]\rangle$, но если из $\mathcal{K}$ удалить ребро $\{2,3\}$, то в полученном графе будут выполняться соотношения $[[u_1v_2]] = [[u_3v_2]] = [[u_3v_4]]$. Это рассуждение показывает, что удаляя ещё какие-то рёбра из $\mathcal{K}_n$ мы можем только уменьшить $\mathrm{rank}\, HH^{(-1,4)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n})$. Поэтому имеем

$$\max_{\mathcal{K}\in\Gamma_m} \mathrm{rank}\, HH^{(-1,4)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = [m/2].$$

Если мы посчитали $HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ и так оказалось, что $\mathrm{rank}\, HH^{(-1,4)}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = n$, то по чётномерным двойным когомологиям $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ распределено ещё по меньшей мере n копий $\mathbb{Z}$, поскольку эйлерова характеристика $HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ равна нулю. В случае джойна нульмерных сфер, на котором максимизируется ранг $HH^{(-1,4)}$, таких копий оказывается $\mathbb{Z}$ ровно n штук. Можем высказать предположение, что на $\mathcal{K} = \mathrm{sk}_1(S^0 * \dots * S^0)$ также достигается максимум по $\mathcal{K} \in \Gamma_m$ и полного ранга $HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

Гипотеза 4.1. Пусть $\mathcal{K}$ – граф на m вершинах. Выполнена оценка на ранг двойных когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$:

$$\max_{\mathcal{K}\in\Gamma_m} \mathrm{rank}\, HH^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = m \,,$$

В случае чётного m максимум достигается на $\mathcal{K}_m = \mathrm{sk}_1(S^0 * \dots * S^0)$, либо в случае нечётного m на $\mathcal{K}_{m-1}$ с одной отражённой вершиной.

Список литературы

[1] Anthony Bahri, Ivan Limonchenko, Taras Panov, Jongbaek Song, and Don Stanley. A stability theorem for bigraded persistence barcodes, 03 2023. 1, 5

[2] Jelena Grbić and Abigail Linton. Lowest-degree triple massey products in moment-angle complexes, 2019. 4

[3] Yang Han. A moment angle complex whose rank of double cohomology is 6. *Topology and its Applications*, 2023. 1

[4] Ivan Limonchenko, Taras Panov, Jongbaek Song, and Donald Stanley. Double cohomology of moment-angle complexes. *Advances in Mathematics*, 432:109274, 2023. 1, 2, 3, 7

[5] Carlos Gabriel Valenzuela Ruiz and Donald Stanley. Double homology and wedge-decomposable simplicial complexes, 2023. 1

[6] Taras E. Panov Victor M. Buchstaber. *Toric Topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2015. 1, 4

[7] Zhilei Zhang. On the rank of the double cohomology of moment-angle complexes, 2024. 1