Московский Государственный Университет
Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

# Курсовая работа

## Двойственность Гейла и торические многообразия

| | |
|---|---|
| Выполнил: | Студент 404 гр Бабкин Дмитрий Николаевич |
| Научный руководитель: | д.ф.-м.н., профессор Т.Е. Панов |

# Содержание

В этой работе будет рассмотрена задача описания структур на торическом многообразии $X_\Sigma$ на языке двойственности Гейла. Оказывается, что некоторые структуры в частности $Nef(X_\Sigma)$, $Ample(X_\Sigma)$, $Pic(X_\Sigma)$, $Cl(X_\Sigma)$ задаются как выпукло геометрические обьекты, построенные на конфигурации векторов двойственной к векторам из веера, задающих наше торическое многообразие. Таким образом получается показать, что двойственность Гейла является эффективным фреймворком для описания такого рода структур. В первом разделе вводятся основные понятия из торической геометрии и служащей ей комбинарики, необходимые в дальнешем, во втором обсуждается сама двойственность Гейла, в третьей мы прилагаем двойственность к описанию дивизоров на торическом многообразии.

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за помощь, внимание и уделенное время.

# 1 Введение. Некоторые понятия из торической геометрии и комбинаторики

Мы повторим здесь основные факты о полиэдральных конусах и веерах, отсылая к [2, главы 1 и 3] для более подробного изложения.

**Определение 1.1.** Подмножество $\sigma$ вещественного векторного пространства $W^*$ называется **полиэдральным конусом** (или просто конусом), если оно состоит из всех линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами конечного набора векторов $a_1, \dots, a_p$ в $W^*$. Обозначение: $\sigma = \operatorname{cone}(a_1, \dots, a_p)$.

Набор векторов может быть пустым, и в этом случае конус состоит только из нулевого вектора, то есть $\operatorname{cone}(\varnothing) = 0$. Размерность $\sigma$ — это размерность его линейной оболочки.

**Определение 1.2.** **Веер** — это конечное множество $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ строго выпуклых конусов в $W^*$, таких что:

1. Каждая грань конуса из $\Sigma$ принадлежит $\Sigma$.

2. Пересечение любых двух конусов из $\Sigma$ является гранью каждого из них.

**Определение 1.3.** **Носитель** $|\Sigma|$ веера — это объединение его конусов:

$$|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \subset W^*.$$

Веер называется **полным**, если $|\Sigma| = W^*$, и **имеет выпуклый носитель**, если $|\Sigma|$ выпукло.

Веер $\Sigma$ в $W^*$ можно задать, указав образующие его одномерных конусов и подмножества образующих, порождающих конусы. Это оправдывает следующий формализм.

**Определение 1.4.** Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — набор векторов, порождающих $W^*$, и пусть $C$ — набор подмножеств множества $[m] = \{1, \ldots, m\}$, содержащий $\varnothing$. Говорят, что $C$ является $A$-замкнутым, если:

1. $\mathrm{cone}(A_I)$ строго выпуклый для любого $I \in C$,

2. если $I \in C$, $J \subset I$ и $\mathrm{cone}(A_J)$ является гранью $\mathrm{cone}(A_I)$, то $J \in C$.

Если $C$ является $A$-замкнутым, то все грани конуса из множества $\{\mathrm{cone}(A_I) : I \in C\}$ также принадлежат этому множеству. Множество $\{\mathrm{cone}(A_I) : I \in C\}$ является веером, если любые два конуса $\mathrm{cone}(A_I)$ и $\mathrm{cone}(A_J)$ пересекаются по общей грани (которая должна быть $\mathrm{cone}(A_{I\cap J})$). В этом случае говорят, что $\{A, C\}$ является **данными веера**.

Обозначим через $X_\Sigma$ **торическое многообразие**, соответствующее рациональному вееру $\Sigma$.

## 2 Двойственность Гейла

Будем следовать изложению в [1] Конфигурация $\mathbf{\Gamma}$ определяет линейное отображение $\Gamma : \mathbb{R}^m \to V^*$, которое отображает $i$ стандартный базисный вектор $e_i$ в $\gamma_i$. Пусть $W = Ker(\Gamma)$, тогда мы имеем точную последовательность.

$$0 \to W \to \mathbb{R}^m \xrightarrow{\Gamma} V^* \to 0 \tag{2.1}$$

Поскольку $\Gamma$ порождает $V^*$, пространство имеет размерность $n := m-k$. Рассмотрим двойственную последовательность

$$0 \to V \xrightarrow{\Gamma^*} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} W^* \to 0 \tag{2.2}$$

где отображение $\Gamma^*$ отправляет $v$ в $(\langle\gamma_1, v\rangle, \dots, \langle\gamma_m, v\rangle)$.Определим $a_i = A(e_i)$.Линейное **Преобразование гейла** оправляет векторную конфигурацию $\Gamma$ внутри $V^*$ в векторную конфигурацию $A = \{a_1, \dots a_m\}$ в $W^*$. Поскольку это инволютивная процедура, $A$ называется **двойственным по Гейлу** к $\Gamma$, а $\Gamma$ — двойственным по Гейлу к $A$. Всякий раз, когда мы говорим о паре двойственных по Гейлу конфигураций $A$ и $\Gamma$, мы предполагаем, что $A$ порождает $W^*$, а $\Gamma$ порождает $V^*$.

Выбирая базисы в $V$ и $W$, мы рассматриваем $\Gamma$ как матрицу размера $k \times m$ с векторами-столбцами $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, а $A$ — как матрицу размера $n \times m$ с векторами-столбцами $a_1, \ldots, a_m$. Тождество $A\Gamma^* = 0$ означает, что строки матрицы $A$ образуют базис в пространстве линейных соотношений между векторами $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Это пространство совпадает с $W$, и мы можем рассматривать $a_i \in W^*$ как линейную функцию, которая сопоставляет линейному соотношению его $i$-й коэффициент.

# 3 Дивизоры на торических многообразиях

Здесь будут встречаться основные понятия из теории дивизоров торических многообразий, которая изложена, например, в [2, 5, 6, 7 глава]. Торическое многообразие $X_\Sigma$ определяется решеткой $N \cong \mathbb{Z}^n$ и веером $\Sigma$ в $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = W^*$, который является рациональным относительно $N$. Пусть $\{A, C\}$ — данные веера $\Sigma$, где $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — множество примитивных образующих одномерных конусов $\Sigma$, а $C$ — $A$-замкнутая коллекция подмножеств множества $[m] = \{1, \ldots, m\}$ (см. раздел 4). Пусть $M = N^*$ — двойственная решетка в $W$. Отображение $A^*\colon W \to \mathbb{R}^m$ переводит $w \in W$ в вектор $(\langle a_1, w\rangle, \ldots, \langle a_m, w\rangle)$. Это отображение можно интерпретировать в терминах торически инвариантных дивизоров Вейля на $X_\Sigma$. А именно, мы отождествляем $i$-й стандартный базисный вектор $e_i$ из $\mathbb{Z}^m$ с неприводимым инвариантным относительно тора дивизором $D_i$, соответствующим $i$-му лучу веера $\Sigma$ (с примитивной образующей $a_i$). Тогда $A^*$ переводит $w \in M$ в главный дивизор $\sum_{i=1}^m \langle a_i, w\rangle D_i$, соответствующий характеру $\chi^w$ тора $\mathbb{C}_N^\times = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$, ассоциированному с $w \in M = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}_N^\times, \mathbb{C}^\times)$.

Факторгруппа $\mathbb{Z}^m/A^*(M)$ является группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X_\Sigma)$, и мы имеем точную последовательность абелевых групп:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{A^*} \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{Cl}(X_\Sigma) \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Если $N = \mathbb{Z}\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$, то отображение $A^*\colon M \to \mathbb{Z}^m$ является расщепляющим инъективным, и $\mathrm{Cl}(X_\Sigma)$ отождествляется с решеткой $L^*$, порожденной двойственной по Гейлу рациональной конфигурацией $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ в $V^*$. В общем случае $\mathrm{Cl}(X_\Sigma)$ изоморфна сумме $L^*$ и конечной группы $N/\mathbb{Z}\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$. В любом случае, мы можем отождествить $\gamma_i$ с классом дивизора $[D_i]$ в $\mathrm{Cl}(X_\Sigma) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R} = V^*$.

**Торически инвариантные дивизоры Картье** на $X_\Sigma$ соответствуют кусочно-линейным функциям $\varphi$ на $|\Sigma|$, которые линейны на конусах $\Sigma$ и принимают целые значения на решетке $N$. Ограничение такой функции $\varphi$ на конус $\sigma \in \Sigma$ задается формулой $\varphi(a) = \langle a, w_\sigma\rangle$ для $a \in \sigma$ и некоторого $w_\sigma \in M$. Кусочно-линейная функция $\varphi\colon |\Sigma| \to \mathbb{R}$ соответствует дивизору Картье $D = -\sum_{i=1}^m \varphi(a_i) D_i$. Обратно, торически-инвариантный дивизор Картье $D = \sum_{i=1}^m b_i D_i$, заданный набором характеров $\chi^{w_\sigma}$ на аффинных кусках $X_\sigma \subset X_\Sigma$ (данные Картье), соответствует кусочно-линейной функции $\varphi_D\colon |\Sigma| \to \mathbb{R}$, заданной формулой $\varphi_D(a) = \langle a, w_\sigma\rangle$ для $a \in \sigma$.

**Группа Пикара** $\mathrm{Pic}(X_\Sigma) \subset \mathrm{Cl}(X_\Sigma)$ состоит из классов дивизоров Картье. Она имеет конечный индекс в $\mathrm{Cl}(X_\Sigma)$ тогда и только тогда, когда веер $\Sigma$ симплициальный [2, предложение 4.2.7]. Если $\Sigma$ симплициальный, то $\mathrm{Pic}(X_\Sigma)\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{R} = \mathrm{Cl}(X_\Sigma)\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{R} = V^*$, а в общем случае $\mathrm{Pic}(X_\Sigma) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ является собственным подпространством в $V^*$.

Кусочно-линейная функция $\varphi\colon |\Sigma| \to \mathbb{R}$, заданная формулой $\varphi(a) = \langle a, w_\sigma\rangle$ для $a \in \sigma$, называется **выпуклой**, если $\varphi(a) \leqslant \langle a, w_\sigma\rangle$ для всех $a \in |\Sigma|$, и **строго выпуклой**, если $\varphi(a) < \langle a, w_\sigma\rangle$ для всех $a \in |\Sigma|\backslash\sigma$. Веер $\Sigma$ с выпуклым носителем допускает строго выпуклую кусочно-линейную функцию $\varphi\colon |\Sigma| \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\Sigma = \Sigma_P$ является нормальным веером выпуклого многогранника $P$. А именно, для строго выпуклой функции $\varphi\colon |\Sigma| \to \mathbb{R}$ веер $\Sigma$ является нормальным веером многогранника

$$P = \{w \in W : \langle a, w\rangle \geqslant \varphi(a) \text{ для } a \in |\Sigma|\} = \{w \in W : \langle a_i, w\rangle - \varphi(a_i) \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

Обратно, если $\Sigma = \Sigma_P$, то опорная функция $P$, заданная формулой $\varphi_P(a) = \min_{w\in P}\langle a, w\rangle$, определена на $|\Sigma_P|$, линейна на конусах $\Sigma_P$ и строго выпукла.

Торически инвариантный дивизор Картье $D$ на $X_\Sigma$ **свободен от базисных точек** тогда и только тогда, когда соответствующая функция $\varphi_D\colon |\Sigma| \to \mathbb{R}$ выпукла [2, теорема 6.1.7]. Если веер $\Sigma$ полный, то торус-инвариантный дивизор Картье $D$ на $X_\Sigma$ **обилен** тогда и только тогда, когда соответствующая функция $\varphi_D\colon |\Sigma| \to \mathbb{R}$ строго выпукла [2, теорема 6.1.14]. В частности, торическое многообразие $X_\Sigma$ проективно тогда и только тогда, когда $\Sigma$ является нормальным веером выпуклого многогранника $P$.

Классы дивизоров, свободных от базисных точек, порождают конус в $V^* = \mathrm{Cl}(X_\Sigma)\otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$, называемый **Nef-конусом** и обозначаемый $\mathrm{Nef}(X_\Sigma)$ (дивизор Картье на торическом многообразии $X_\Sigma$ численно эффективен тогда и только тогда, когда он свободен от базисных точек). Множество положительных кратных обильных классов дивизоров на полном торическом многообразии $X_\Sigma$ называется **Ample-конусом** и обозначается $\mathrm{Ample}(X_\Sigma)$. Многообразие $X_\Sigma$ проективно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ample}(X_\Sigma) \neq \varnothing$. (Заметим, что $\mathrm{Ample}(X_\Sigma)$ не является конусом в строгом смысле; это подмножество в $V^*$, замыкание которого является полиэдральным конусом или пустым множеством.)

Nef-конус и Ample-конус а также группа пикара $Pic(X_\Sigma)$ могут быть эффективно описаны в терминах двойственных по Гейлу конусов веера $\Sigma$.

**Предложение 3.1.** *[3] Пусть $\Sigma = \{cone(A_I) : I \in C\}$ — рациональный веер в $W^*$ с выпуклым носителем полной размерности, и пусть $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ — двойственная по Гейлу рациональная конфигурация в $V^*$.*

*1. **Группа Пикара** торического многообразия $X_\Sigma$ задается следующим образом:*

$$Pic(X_\Sigma) = \bigcap_{I \in C} \mathbb{Z}\langle \Gamma_{\hat{I}} \rangle.$$

*2. **Nef-конус** торического многообразия $X_\Sigma$ задается следующим образом:*

$$Nef(X_\Sigma) = \bigcap_{I \in C} cone(\Gamma_{\hat{I}}).$$

*3. Если $\Sigma$ полный, то **Ample-конус** $X_\Sigma$ задается следующим образом:*

$$Ample(X_\Sigma) = \bigcap_{I \in C} relint(cone(\Gamma_I)).$$

## Доказательство

(1)Докажем первое утверждение. Напомним, что $\gamma_i \in V^*$ отождествляется с классом дивизора $[D_i]$.

Пусть $[D] = \sum_{i=1}^m b_i[D_i] \in V^*$ — класс дивизора, так что $b_i = -\varphi(a_i)$ для некоторой кусочно-линейной функции $\varphi : |\Sigma| \to \mathbb{R}$. Поскольку $\varphi$ линейна на любом конусе $A_I$ для $I \in C$, получаем $\varphi(a_i) = \langle a_i, w_I \rangle$ для некоторого $w_I \in W$ и $i \in I$. Тогда

$$[D] = -\sum_{i=1}^m \varphi(a_i)[D_i] + \sum_{i=1}^m \langle a_i, w_I \rangle [D_i] = \sum_{i \in \hat{I}} (\langle a_i, w_I \rangle - \varphi(a_i))\gamma_i \in \mathbb{Z}\langle \Gamma_{\hat{I}} \rangle$$

для любого $I \in C$. Здесь первое равенство выполняется, поскольку $\sum_{i=1}^m \langle a_i, w_I \rangle D_i$ — главный дивизор (и $\sum_{i=1}^m \langle a_i, w_I \rangle \gamma_i = 0$ по двойственности Гейла).

Чтобы доказать обратное включение, достаточно показать, что любой рациональный вектор

$$\gamma \in \bigcap_{I \in C} \mathbb{Z}\langle \Gamma_{\hat{I}} \rangle$$

является классом дивизора. Запишем

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} b_i [D_i]$$

с целыми $b_i$. Возьмем $I \in C$. Поскольку $\gamma \in \operatorname{span} \Gamma_{\hat{I}}$, мы также можем записать

$$\gamma = \sum_{i \in \hat{I}} b_i' [D_i]$$

с целыми $b_i'$. Теперь

$$\sum_{i \in I_b} b_i' D_i - \sum_{i=1}^{m} b_i D_i \in \operatorname{Ker} \Gamma$$

(см. 3.1), так что существует целочисленный $w_I \in W$, такой что

$$\sum_{i=1}^{m} \langle a_i, w_I \rangle D_i = \sum_{i \in I_b} b_i' D_i - \sum_{i=1}^{m} b_i D_i.$$

Данные $w_I$ задают кусочно линейную функцию $\phi : |\Sigma| \to \mathbb{R}$ а значит класс дивизора Картье.

(2) Пусть $[D] = \sum_{i=1}^{m} b_i [D_i] \in V^*$ – класс базисно свободного дивизора, где $b_i = -\varphi(a_i)$ для некоторой выпуклой кусочно-линейной функции $\varphi : |\Sigma| \to \mathbb{R}$. Поскольку $\varphi$ линейна на любом конусе $A_I$ для $I \in C$, мы получаем $\varphi(a_i) = \langle a_i, w_I \rangle$ для некоторого $w_I \in W$ и $i \in I$. Тогда

$$[D] = -\sum_{i=1}^{m} \varphi(a_i)[D_i] + \sum_{i=1}^{m} \langle a_i, w_I \rangle [D_i] = \sum_{i \in I^b} (\langle a_i, w_I \rangle - \varphi(a_i))\gamma_i \in \operatorname{cone} \Gamma_{\hat{I}}$$

для любого $I \in C$. Первое равенство выполняется, так как $\sum_{i=1}^{m}\langle a_i, w_I\rangle D_i$ – главный дивизор (и $\sum_{i=1}^{m}\langle a_i, w_I\rangle \gamma_i = 0$ по двойственности Гейла), а включение справедливо, поскольку $\langle a_i, w_I\rangle - \varphi(a_i) \geqslant 0$ для выпуклой $\varphi$. Отсюда следует, что $[D] \in \bigcap_{I\in C} \operatorname{cone}\Gamma_{\hat{I}}$.

Для доказательства обратного включения достаточно показать, что любой рациональный вектор $\gamma \in \bigcap_{I\in C} \operatorname{cone}\Gamma_{\hat{I}}$ является положительным кратным класса базисно свободного дивизора. Запишем $\gamma = \sum_{i=1}^{m} b_i[D_i]$ с рациональными $b_i$. Возьмем $I \in C$. Поскольку $\gamma \in \operatorname{cone}\Gamma_{\hat{I}}$, мы можем также записать $\gamma = \sum_{i\in\hat{I}} b_i'[D_i]$ с рациональными $b_i' \geqslant 0$. Теперь $\sum_{i\in\hat{I}} b_i' D_i - \sum_{i=1}^{m} b_i D_i \in \operatorname{Ker}\Gamma$ (см. 3.1), поэтому существует рациональный $w_I \in W$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{m}\langle a_i, w_I\rangle D_i = \sum_{i\in\hat{I}} b_i' D_i - \sum_{i=1}^{m} b_i D_i. \tag{14.5}$$

Данные $\{w_I : I \in C\}$ определяют кусочно-линейную функцию $\varphi : |\Sigma| \to \mathbb{R}$, заданную как $\varphi(a) = \langle a, w_I\rangle$ для $a \in \operatorname{cone} A_I$. Из (14.5) мы получаем $\varphi(a_i) = -b_i$ для $i \in I$. Поскольку каждый $a_i$ принадлежит некоторому конусу, мы получаем $\varphi(a_i) = -b_i$ для любого $i$. Тождество (14.5) также показывает, что

$$\langle a_i, w_I\rangle - \varphi(a_i) = \langle a_i, w_I\rangle + b_i = b_i' \geqslant 0 \quad \text{для } i \in \hat{I},$$

поэтому $\varphi$ выпукла. Поскольку $\varphi(a_i)$ рациональна для любого $i$, умножением на общий знаменатель мы добиваемся, что $\varphi$ целочисленна на $N$. Следовательно, $\gamma = \sum_{i=1}^{m} b_i[D_i] = -\sum_{i=1}^{m}\varphi(a_i)[D_i]$ является классом базисно свободного дивизора с точностью до положительного множителя.

Доказательство (3) аналогично: нестрогие неравенства вида $\langle a_i, w_I\rangle - \varphi(a_i) \geqslant 0$ и $b_i' \geqslant 0$ заменяются строгими, а функция $\varphi$ становится строго выпуклой.

Рассмотрим для иллюстрации пример из работы [1].

**Пример 3.2.** Зададим конфигурации векторов следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

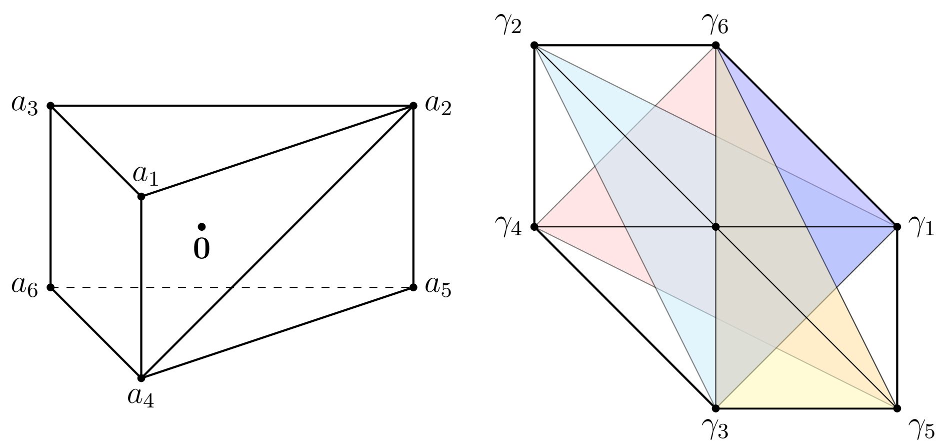


Рис. 1:

Проведем вычисление группы Пикара с использованием техники изложенной в [2][chapter 4 ex 4.2.13]. Дивизору Картье соответсвует кусочно линейная функция $\varphi$ на конусе, которая целочисленная относительно решетки, причем на каждом конусе ее определяет вектор $w_I$. Можно написать условия линейности и целочисленности на каждом конусе.

Положим дивизор главным на $w_{2356}$. Условие линейности на $w_{1346}$ даст нам $\varphi(a_1) = -\varphi(a_4)$.

$$\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \varphi(a_4) + \varphi(a_5) = 0 \tag{3.2}$$

где $\varphi(a_2) = \varphi(a_5) = 0$. На другом несимплинциальном конусе мы положили функцию нулем. Симплинциальные конусы ничего не дают. Условия целлочиленности на $cone(a_1, a_2, a_3)$ и $cone(a_4, a_5, a_6)$ дадут кратность каждого из $\varphi(a_i)$ трем. Рассмотрим например $cone(a_1, a_2, a_3)$.

$$a + 0 + c = \varphi(a_1) \tag{3.3}$$

$$0 + b + c = 0 \tag{3.4}$$

$$-a - b + c = 0 \tag{3.5}$$

Из второго уравнения $-b = c$, подставим его во второе $a = 2c$. $3c = \varphi(a_1)$. Аналогично для $cone(a_4, a_5, a_6)$. Остальные условия ничего не дают.

Это вычисление подтверждается доказанным утверждением. Как видно из картинки $Pic(X_\Sigma) = \mathbb{Z}\langle 3(\gamma_1 + \gamma_4)\rangle$. Действительно, $\gamma_1 + \gamma_4 = \gamma_2 + \gamma_5 = \gamma_3 + \gamma_6 = (0, 0, 2)$, а $\gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = (0, 0, 3)$ Таким образом в пересечении решеток лежит $3(\gamma_1 + \gamma_4) = (0, 0, 6)$. И пересечение пространств равно $\mathbb{Z}\langle 3(\gamma_1 + \gamma_4)\rangle$.

# Список литературы

[1] Victor Buchstaber и Taras Panov. *Toric Topology.* 2014. arXiv: `1210.2368 [math.AT]`. URL: `https://arxiv.org/abs/1210.2368`.

[2] D.A. Cox, J.B. Little и H.K. Schenck. *Toric Varieties.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2011. ISBN: 9780821848197. URL: `https://books.google.ru/books?id=AoSDAwAAQBAJ`.

[3] Taras Panov. *Exponential actions defined by vector configurations, Gale duality, and moment-angle manifolds.* Нояб. 2024. DOI: `10.48550/arXiv.2411.03366`.